曲面上のℓ進層の特性サイクル。

1. ℓ進層の特性サイクル。

2. 局所体の分岐理論　3. 余次元1の点、

4. 曲面の場合

1. k 標数 $p>0$ 代数閉体　$\ell \neq p$ 素数

X k上 smooth　$\mathcal{F}$ X上のℓ進層

期待. 特性サイクル $\mathrm{Char}(\mathcal{F})$ が余接束 T^*X 上の d次元のサイクルとして定義され、次の性質をみたす.

- 加法性　$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exact なら

$$\mathrm{Char}(\mathcal{F}) = \mathrm{Char}(\mathcal{F}') + \mathrm{Char}(\mathcal{F}'')$$

$j: U \to X$ dense open imm.　$j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 同形.

$j^*\mathcal{F}$ smooth の場合に帰着.

- étale local
- Euler数　X proper なら $\chi(X,\mathcal{F}) = (\mathrm{Char}(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X}$

0切断.

- vanishing cycle.　$f: X \to C$ smooth curve への flat 射

$x \in X$ を除き non-characteristic なら

$$\underset{\text{dim + Sw}}{\mathrm{dim\,tot}}\ \phi_x(\mathcal{F}, f) = (\mathrm{Char}\,\mathcal{F}, df)_{T^*X, x}.$$

例1. $D \subset X$ div. w.s.n.c.　$\mathcal{F}$ smooth on $U = X - D$

tamely ramified along $D = \bigcup D_i$ なら

$$\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}) = (-1)^d \operatorname{rank}\mathcal{F} \sum_{I} [T^*_{D_I} X].$$

2. $\dim X = 1$.　$\mathcal{F}$ smooth on $U = X -$ ~~…~~ D なら

$$\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}) = -\Big(\operatorname{rank}\mathcal{F}\,[T^*_X X] + \sum_{x \in D} \mathrm{dimtot}_x \mathcal{F}\,[T^*_x X]\Big)$$

2　X smooth $\supset D$ smooth div.　ξ gen pt

K ξでの局所体 $= \mathrm{Frac}\,\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$　F 剰余体 $\mathcal{O}_{D,\xi} = k(\xi)$

$G_K = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$　G_K^r $r \geq 1$ 分岐群 の filtration.

$G_K^1 = I_K \supset G_K^{1+} = P_K$　　$G_K^{r+} = \overline{\bigcup_{s>r} G_K^s}$.

$V \to U = X - D$ finite étale Galois 被覆 の D に沿っての分岐が $r+$ 以下とは.　$r \geq 1$ 整数とし $R = rD$ とおく

$$\begin{tikzcd}
 & Z^{(R)} \arrow[d] \arrow[dr, dash] & \\
V/G \arrow[ur] \arrow[d, "\wr"] & (X \times X)^{(R)} \arrow[d] & V \times V/\Delta G \arrow[d] \\
R \subset X \arrow[r] & X \times X & U \times U \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

これが これの像に対する ξ の近傍で étale

$T^*X(R) \times_X D \subset (X \times X)^{(R)} \supset U \times U$

$\Rightarrow$ G_K^r/G_K^{r+} は abel, p 倍で 0 で 指標群からの 単射 $(G_K^r/G_K^{r+})^\vee \longrightarrow \Omega_X^1(R)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} \bar{F}$ が定まる

$\chi \longmapsto \mathrm{char}(\chi)$ 特性形式

3.　X, D, ξ, K as above　$\bar{\eta} = \mathrm{Spec}\, K^{sep}$

$\mathcal{F}$　$U = X - D$ 上の smooth ℓ進層　$\mathcal{F}_{\bar\eta}$: G_Kの ℓ進表現.

slope decomposition　$\mathcal{F}_{\bar\eta} = \bigoplus_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\bar\eta}^{(r)}$,　G_K^{r+}不変部分 $= \bigoplus_{s \leq r} \mathcal{F}_{\bar\eta}^{(s)}$

指標分解　$\mathcal{F}_{\bar\eta}^{(r)} = \bigoplus_{\chi \in (G_K^r/G_K^{r+})^\vee} \chi^{\oplus n_\chi}$

以下　$r > 1$ integer.　char χ は $\bar{F}$ 係数　for $\mathcal{F}_{\bar\eta}^{(r)} \neq 0$, $n_\chi \neq 0$ とする (for simplicity)

$\mathrm{char}(\chi) : L(R)|_D \to T^*X|_D$　直線束から余接束への単射

定義 $$\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}) = (-1)^d \Big(\mathrm{rank}\,\mathcal{F}\cdot[T^*_X X] + \mathrm{rank}\,\mathcal{F}^{(1)}\cdot[T^*_D X] + \sum_{r>1} r\cdot \sum_x n_x\,[\mathrm{char}\ X]\Big)$$

T^*X の d次元 cycle

$$DT(j_!\mathcal{F}) = \sum_{r\geq 1} r\cdot \mathrm{rank}\,\mathcal{F}^{(r)}\cdot D.$$

X の divisor

4.

$$\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}\cdot[T^*_X X] + \mathrm{Char}(\mathcal{F})^{(1)} + \sum_{x\in\Sigma} n_x\,[T^*_x X]$$

How to determine?

Radon変換. X proj smooth. $\mathcal{L}$ very ample $E = \Gamma(X, \mathcal{L})$

$X \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ $\quad \mathbb{H} \subset \mathbb{P}\times\mathbb{P}^\vee$ univ. hyp plane

dual = space of hyp. planes

$X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{H} \xrightarrow{q} \mathbb{P}^\vee$ univ. family of hyp plane sections

$p \downarrow$

X $\qquad R_{\mathcal{L}}(j_!\mathcal{F}) = Rq_* p^* j_!\mathcal{F}$ on $\mathbb{P}^\vee$

$R_{\mathcal{L}}(j_!\mathcal{F})$ が分岐する $\mathbb{P}^\vee$ の因子.

slope 分解に現れる

$X^\vee$ Xの双対. $T^\vee_{i,x}$ Dの既約成分 D_i の gen. pt ξ_i での指標 χ との特性形式で定まるもの

有限個の閉点 $x\in D$ の双対超平面 H_x.

係数 n_x を $DT(R_{\mathcal{L}}(j_!\mathcal{F}))$ に現れる H_x の係数を使って定義し

$X^\vee$, $T^\vee_{i,x}$, H_x の1次結合.

$\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F})$ を定義する (他の成分も実は同様)

定理 1 $\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F})$ は j によらず well-def'd.

2. $\dim\mathrm{tot}_x(j_!\mathcal{F}, f) = (\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}), df)_x$

孤立特異点のとき

3. $\chi_c(U, \mathcal{F}) = (\mathrm{Char}(j_!\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X}$

---

2 ⇒ 1, 3. 2 が核心.

使うこと.
- 分岐理論. 曲線への制限. vanishing cycle の vanishing
- 変形での vanishing cycle の安定性.
  Hensel の補題 (Elkik). vanishing cycle の極限の vanishing
  Vanishing cycle の次元公式 (Deligne-Kato)
- よい pencil への変形
  Milnor公式 (Deligne SGA7 の証明の方法 (大域的))