問. (1) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(2) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(3) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(4) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(5) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(6) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(7) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(8) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(9) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(10) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -2 & 8 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 13 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(11) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(12) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(13) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(14) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -1 & 6 & -11 \\ -1 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(15) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(16) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(17) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ -3 & 15 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(18) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -18 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(19) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(20) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & -11 & -14 \\ 1 & -5 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 16 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(21) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(22) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(23) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(24) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -12 & 0 \\ -3 & -1 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -12 & 0 \\ -3 & -1 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 9 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(25) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(26) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(27) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(28) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,4)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(29) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & -2 \\ -3 & -12 & 15 & 6 \\ 1 & 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(30) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(31) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -11 & 9 \\ 1 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ -2 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(32) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 4 \\ -3 & 16 & 10 & -11 \\ -3 & 12 & 30 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 15 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(33) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,4)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(34) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(35) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(36) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,3)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,4)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(37) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2)\text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(38) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 13 & -3 \\ -3 & -15 & -12 & 6 \\ 2 & 11 & 14 & -2 \\ -1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 13 & -3 \\ 1 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & 14 & -2 \\ -1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & 13 & -3 \\ 2 & 11 & 14 & -2 \\ -1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3,3) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 4.
(39) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.
(40) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -10 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -10 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(41) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(42) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -14 & 16 \\ 1 & -2 & 11 & -4 \\ -2 & -3 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -12 & 8 \\ 0 & -2 & 12 & -8 \\ 0 & -3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & 12 & -8 \\ 0 & -3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行と第 4 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(43) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -3 & 18 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -12 & 12 & -5 \\ 1 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 4 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -12 & 12 & -5 \\ -3 & 18 & -15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(44) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 8 & 2 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 8 & 2 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(45) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -3 & -13 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & -12 & -2 \\ -1 & -2 & -16 & 1 \\ -2 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} -3 & -13 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & -12 & -2 \\ 1 & 2 & 16 & -1 \\ -2 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 2 & -12 & -2 \\ -3 & -13 & -6 & 14 \\ -2 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 2 & -12 & -2 \\ 0 & -7 & 42 & 11 \\ 0 & -4 & 24 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 42 & 11 \\ 0 & -4 & 24 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を 4 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(46) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,3) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 3.
(47) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -8 & -13 \\ -1 & 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 2.
(48) 与えられた行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -3 & -15 & -6 & 15 \\ -2 & -10 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -5 \\ -2 & -10 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1,1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，求める階数は 1.

作成：
蔦谷充伸（九州大学）
tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp