

問. 以下では基本変形による解答例を与えるが, 行列式の公式を用いた解答も考えてみよ.  
 (1) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 2 となり, 逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた行列の階数は 1 となり, 逆行列は存在しない.

(3) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行と第 2 行を入れ替える  $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 1 となり, 逆行列は存在しない.

(4) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行を  $-1$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1, 1) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 2 行を  $-1$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

第 3 行を  $2$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3, 3) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 3 となり, 逆行列は

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(5) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行を  $3$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1, 1) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 2 行を  $-\frac{20}{3}$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & 0 \\ 0 & -\frac{25}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 2 となり, 逆行列は存在しない.

(6) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 2 行を  $4$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 1 行と第 2 行を入れ替える  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1, 1) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

第 3 行を  $3$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

第 2 行と第 3 行を入れ替える  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 2 となり, 逆行列は存在しない.  
 (7) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1, 1) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -19 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -17 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 2 行を  $-3$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -19 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -17 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2, 2) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 3 行を  $-13/3$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3, 3) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{18}{13} & \frac{7}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{13}{13} & \frac{11}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{27}{13} & \frac{4}{13} & 1 \end{pmatrix}$

第 4 行を  $2/13$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{18}{13} & \frac{7}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{13}{13} & \frac{11}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{13}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(4, 4) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -16 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{27}{2} & 2 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

となるので与えられた行列の階数は 4 となり, 逆行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -16 & 3 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} & 2 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

(8) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行と第 3 行を入れ替える  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1, 1) 成分を要にして掃き出す  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 4 & 29 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 19 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

第 3 行を  $-20$  で割る  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{29}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 19 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{29}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 19 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2, 2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{29}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -10 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } -2 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{29}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -10 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3, 3) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた行列の階数は 3 となり、逆行列は存在しない。  
(9) 次のように行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } 4 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1, 1) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -\frac{21}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -3 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -\frac{21}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2, 2) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } 1/4 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & \frac{20}{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3, 4) \text{ 成分を要にして掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & \frac{20}{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & \frac{103}{3} & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた行列の階数は 3 となり、逆行列は存在しない。

作成:

蔦谷充伸 (九州大学)

tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp