問 1. 固有ベクトルのなす基底の取り方には不定性があるので，ここに書かれているのが唯一の答えではない．適宜自分の解答と比較せよ．
(1) A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\det(xE_2 - A) &= \det\begin{pmatrix} x+2 & -3 \\ 0 & x+5 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 7x + 10 \\ &= (x+2)(x+5)\end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-2, -5$.
固有値-2 について

$$-2E_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -3y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有値-5 について

$$-5E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\det(xE_2 - A) &= \det\begin{pmatrix} x-1 & -6 \\ 4 & x+9 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 8x + 15 \\ &= (x+3)(x+5)\end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-3, -5$.
固有値-3 について

$$-3E_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有値-5 について

$$-5E_2 - A = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\det(xE_2 - A) &= \det\begin{pmatrix} x+5 & 0 \\ -8 & x-3 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 2x - 15 \\ &= (x-3)(x+5)\end{aligned}$$

となるので A の固有値は $3, -5$.
固有値 3 について

$$3E_2 - A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x = 0 \\ -8x = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値-5 について

$$-5E_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -8x - 8y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(4) A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\det(xE_3 - A) &= \det\begin{pmatrix} x-3 & 2 & 2 \\ -5 & x+3 & 3 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 9x \\ &= x(x-3)(x+3)\end{aligned}$$

となるので A の固有値は $0, 3, -3$.
固有値 0 について

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -3x+2y+2z=0 \\ -5x+3y+3z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 3 について

$$3E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 2y+2z=0 \\ -5x+6y+3z=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値-3 について

$$-3E_3 - A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -6x+2y+2z=0 \\ -5x+3z=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(5) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x-5 & -1 & -5 \\ 4 & x-1 & 4 \\ 2 & 1 & x+2 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x \\ &= x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $0, 1, 3$.
固有値 0 について

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -5x-y-5z=0 \\ 4x-y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 1 について

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x-y-5z=0 \\ 4x+4z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値 3 について

$$3E_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -2x-y-5z=0 \\ 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(6) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x-2 & -12 & 8 \\ 4 & x-22 & 10 \\ 8 & -36 & x+16 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 8x^2 + 4x + 48 \\ &= (x+2)(x-6)(x-4) \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-2, 6, 4$.
固有値-2 について

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 8 \\ 4 & -24 & 10 \\ 8 & -36 & 14 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x-12y+8z=0 \\ 4x-24y+10z=0 \\ 8x-36y+14z=0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有値 6 について

$$6E_3 - A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ 4 & -16 & 10 \\ 8 & -36 & 22 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 4x - 12y + 8z = 0 \\ 4x - 16y + 10z = 0 \\ 8x - 36y + 22z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有値 4 について

$$4E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 4 & -18 & 10 \\ 8 & -36 & 20 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x - 12y + 8z = 0 \\ 4x - 18y + 10z = 0 \\ 8x - 36y + 20z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x-1 & 8 & 0 \\ 4 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & x-9 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 15x^2 + 27x + 243 \\ &= (x+3)(x-9)^2 \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-3, 9$.
固有値-3 について

$$-3E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x + 8y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \\ -12z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有値 9 について

$$9E_3 - A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(8) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x+3 & 2 & 6 \\ 2 & x+3 & 6 \\ -2 & -2 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \\ &= (x-3)(x+3)^2 \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $3, -3$.
固有値 3 について

$$3E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 6x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値-3 について

$$-3E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 6z = 0 \\ -2x - 2y - 8z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(9) A の固有多項式は

$$\det(xE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 2 & x+4 \end{pmatrix}$$
$$= x^3 + 7x^2 + 16x + 12$$
$$= (x+3)(x+2)^2$$

となるので A の固有値は $-3, -2$.
固有値-3 について

$$-3E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有値-2 について

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

問 2. 固有ベクトルのなす正規直交基底の取り方には不定性があるので，ここに書かれているのが唯一の答えではない．適宜自分の解答と比較せよ．
(1) A の固有多項式は

$$\det(xE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x+47 & -9 \\ -9 & x+23 \end{pmatrix}$$
$$= x^2 + 70x + 1000$$
$$= (x+50)(x+20)$$

となるので A の固有値は $-50, -20$.
固有値-50 について

$$-50E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -9 & -27 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -3x - 9y = 0 \\ -9x - 27y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

固有値-20 について

$$-20E_2 - A = \begin{pmatrix} 27 & -9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 27x - 9y = 0 \\ -9x + 3y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{3}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) A の固有多項式は

$$\det(xE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x+35 & -6 \\ -6 & x+30 \end{pmatrix}$$
$$= x^2 + 65x + 1014$$
$$= (x+39)(x+26)$$

となるので A の固有値は $-39, -26$.
固有値-39 について

$$-39E_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ -6x - 9y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{13}\sqrt{13} \\ -\frac{2}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

固有値-26 について

$$-26E_2 - A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 9x - 6y = 0 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{13}\sqrt{13} \\ \frac{3}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{13}\sqrt{13} & \frac{2}{13}\sqrt{13} \\ -\frac{2}{13}\sqrt{13} & \frac{3}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有多項式は

$$\det(xE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x+39 & -3 \\ -3 & x+31 \end{pmatrix}$$
$$= x^2 + 70x + 1200$$
$$= (x+40)(x+30)$$

となるので A の固有値は $-40,-30$.
固有値-40 について

$$-40E_2 - A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

固有値-30 について

$$-30E_2 - A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 9x - 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{3}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x+6 & -6 & 0 \\ -6 & x & -6 \\ 0 & -6 & x+6 \end{pmatrix} \\ &= x^3 + 12x^2 - 36x - 432 \\ &= (x+6)(x+12)(x-6) \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-6,-12,6$.
固有値-6 について

$$-6E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -6y = 0 \\ -6x - 6y - 6z = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値-12 について

$$-12E_3 - A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ -6x - 12y - 6z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

固有値 6 について

$$6E_3 - A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 12x - 6y = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \\ -6y + 12z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x-5 & -8 & 1 \\ -8 & x+4 & -8 \\ 1 & -8 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 6x^2 - 144x + 864 \\ &= (x+12)(x-6)(x-12) \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-12,6,12$.
固有値-12 について

$$-12E_3 - A = \begin{pmatrix} -17 & -8 & 1 \\ -8 & -8 & -8 \\ 1 & -8 & -17 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -17x - 8y + z = 0 \\ -8x - 8y - 8z = 0 \\ x - 8y - 17z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

固有値 6 について

$$6E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -8 & 10 & -8 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} x - 8y + z = 0 \\ -8x + 10y - 8z = 0 \\ x - 8y + z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値 12 について

$$12E_3 - A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 7x - 8y + z = 0 \\ -8x + 16y - 8z = 0 \\ x - 8y + 7z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x-4 & 2 & 2 \\ 2 & x-10 & 8 \\ 2 & 8 & x-10 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 24x^2 + 108x \\ &= (x-18)(x-6)x \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $18, 6, 0$.
固有値 18 について

$$18E_3 - A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 14x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 8y + 8z = 0 \\ 2x + 8y + 8z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値 6 について

$$6E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 8 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 8z = 0 \\ 2x + 8y - 4z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

固有値 0 について

$$-A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 8 \\ 2 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 10y + 8z = 0 \\ 2x + 8y - 10z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} x+17 & 4 & -8 \\ 4 & x+11 & -4 \\ -8 & -4 & x+17 \end{pmatrix} \\ &= x^3 + 45x^2 + 567x + 2187 \\ &= (x+27)(x+9)^2 \end{aligned}$$

となるので A の固有値は $-27, -9$.
固有値-27 について

$$-27E_3 - A = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -8 \\ 4 & -16 & -4 \\ -8 & -4 & -10 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -10x + 4y - 8z = 0 \\ 4x - 16y - 4z = 0 \\ -8x - 4y - 10z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

固有値-9 について

$$-9E_3 - A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x + 4y - 8z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \\ -8x - 4y + 8z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(8) A の固有多項式は

$$\det(xE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-5 & -1 & 2 \\ -1 & x-5 & -2 \\ 2 & -2 & x-2 \end{pmatrix}$$
$$= x^3 - 36x^2 + 324x$$
$$= x(x-18)^2$$

となるので A の固有値は $0, 18$.
固有値 0 について

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ -x - 5y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

固有値 18 について

$$18E_3 - A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 2 \\ -1 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} 13x - y + 2z = 0 \\ -x + 13y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 16z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) A の固有多項式は

$$\det(xE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-4 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$
$$= x^3 - 5x^2$$
$$= (x-5)x^2$$

となるので A の固有値は $5, 0$.
固有値 5 について

$$5E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 5y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

固有値 0 について

$$-A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

なので，連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

を解くと，求める固有空間の正規直交基底は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

以上から

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

作成：

蔦谷充伸（九州大学）

tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp