

幾何学的バー構成の基本性質と応用

蔦谷 充伸*

目次

0	はじめに	2
0.1	このノートでの約束等	2
1	準備：ホモトピーファイバー列	2
1.1	Serre ファイブレーション	2
1.2	CW 複体	4
1.3	ホモトピーファイバーとホモトピーファイバー列	5
2	幾何学的バー構成と代数的バー構成	8
2.1	幾何学的バー構成	8
2.2	代数的バー構成	10
2.3	幾何学的バー構成と代数的バー構成	13
3	幾何学的バー構成のホモトピーファイバー列への応用	14
3.1	準備	15
3.2	写像とモノイドの作用の対応	16
3.2.1	写像から作用を与え、作用から写像を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻る	16
3.2.2	作用から写像を与え、写像から作用を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻る	17
3.3	写像とモノイドの準同型の対応	17
3.3.1	写像からモノイド準同型を与え、モノイド準同型から写像を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻る	18
3.4	ホモトピーファイバー列の recognition principle	18
4	A_∞ -空間と A_∞ -代数	19
4.1	A_∞ -空間と結合多面体	19
4.1.1	高次ホモトピー結合性	19
4.1.2	結合多面体	20
4.2	A_∞ -写像と multiplihedra	21
4.3	A_∞ -代数とその間の射	23

*九州大学大学院数理学研究院 tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp

4.4	A_∞ -空間から A_∞ -代数への対応	26
5	A_∞ -構造のバー構成による記述 (概要)	26
5.1	結合多面体を使った幾何学的バー構成	26
5.2	A_∞ -代数のバー構成と A_∞ -代数の射	27
6	扱うことができなかった内容	28

0 はじめに

このノートは 2019 年 6 月の京都大学での集中講義のために作成したものである。「よい教科書」にはなっていないと思うので、きちんと勉強されたい方は引用した文献を参照されることを強くお勧めする。

0.1 このノートでの約束等

- 圏論のごく初歩的な内容は仮定する。つまり、圏の定義、基本的な圏の例 (集合の圏, 位相空間の圏, 群の圏など), 関手, 自然変換などは仮定する。極限についても知っている方が読みやすいと思われるが, なるべく説明する。
- 位相空間の間の「写像」は特に断らない限り「連続写像」を意味するものとする。
- ホモトピーや基点を保つホモトピー, 写像のホモトピー類, ホモトピー集合, ホモトピー同値写像, ホモトピー群, 位相空間のホモロジー群・コホモロジー環などについても仮定する。
- 基点付き位相空間の基点は混乱の無いときは * で表す。基点付き位相空間の間の「写像」は特に断らない限り「基点を保つ連続写像」を意味するものとする。また, 基点付き位相空間のホモトピー群の基点は断らない限り与えられた基点とする。
- $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$: 単位閉区間。
- $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$: 単位球体, D^0 は一点集合。
- $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset D^n$: 単位球面, S^{-1} は空集合。

これらの内容に関するよい教科書はたくさんあるが, 有名なもののひとつとして [May99] を挙げておく。第 1 節の内容も [May99] にほぼ含まれている。

1 準備: ホモトピーファイバー列

1.1 Serre ファイブレーション

定義 1.1. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が **Serre ファイブレーション** であるとは, 写像 $G: I \times I^n \rightarrow Y$, $g_0: I^n \rightarrow X$ に対し, $fg(t) = G(0, t)$ が任意の $t \in I^n$ に対して成り立つならば, 次を満たす写像 $g: I \times I^n \rightarrow X$ が存在することである。

- 任意の $t \in I^n$ に対し $g(0, t) = g_0(t)$,

- 任意の $(s, t) \in I \times I^n$ に対し $fg(s, t) = G(s, t)$.

注意 1.2. Serre ファイブレーションは全射とは限らない.

注意 1.3. 定義に現れる条件を次のような可換図式で書く.

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{g_0} & X \\ (0, \text{id}) \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ I \times I^n & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

この図式を使って条件を説明すると、外側の四角形が可換であるとき、点線の写像が存在して、ふたつの三角形も可換になる、となる.

例 1.4. 空集合からの写像 $\emptyset \rightarrow X$ は Serre ファイブレーション.

例 1.5. $p: E \rightarrow B$ が局所自明ファイブレーション (ファイバー束) とは、任意の $b \in B$ に対し、 b の近傍 $U \subset B$ が存在して同相写像 $\xi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(b)$ が存在して、任意の $e \in p^{-1}(U)$ に対し、 $\xi(e)$ の第 1 成分が $p(e)$ となること. 局所自明ファイブレーションは Serre ファイブレーションである.

問題 1.1. 局所自明ファイブレーションが実際に Serre ファイブレーションになっていることを確認せよ.

命題 1.6 (ホモトピー長完全列). 基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ は Serre ファイブレーションとし、 $F = f^{-1}(*)$ とおき、包含写像を $i: F \rightarrow X$ と書く. このとき、自然な準同型 $\partial: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$ が存在して、次は完全列となる:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y)$$

ただし、群以外の対象を含む 3 項の完全性は以下を意味することとする.

- $\partial: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_0(F)$ はある作用 $\rho: \pi_0(F) \times \pi_1(Y) \rightarrow \pi_0(F)$ によって $\partial(\alpha) = \rho(*, \alpha)$ と書ける.
- $\pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F)$ が完全とは、 $\rho(-, \alpha)$ が恒等写像となることと $f_*(\beta) = \alpha$ なる $\beta \in \pi_1(X)$ が存在することが同値であること.
- $\pi_1(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X)$ が完全とは、 $i_*(\alpha) = i_*(\alpha')$ となることと $\alpha' = \rho(\alpha, \beta)$ なる $\beta \in \pi_1(Y)$ が存在することが同値であること.
- $\pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y)$ が完全とは、 $f_*(\alpha) = *$ となることと $i_*(\beta) = \alpha$ なる $\beta \in \pi_0(F)$ が存在することが同値であること.

また、 ∂ の自然性は次を意味する. すなわち、Serre ファイブレーション $f: X \rightarrow Y, f': X' \rightarrow Y'$ に対し、可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

があるとき、 $Y \rightarrow Y'$ とファイバーの間の写像 $F \rightarrow F'$ の誘導写像は次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(Y') & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F') \end{array}$$

注意 1.7. ∂ の自然性から, Serre ファイブレーションの間の写像があるとき, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(Y) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y') & \longrightarrow & \pi_n(F') & \longrightarrow & \pi_n(X') & \longrightarrow & \pi_n(Y') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

引き戻しに関する議論を後で使うので, 復習しておく.

定義 1.8. 位相空間の次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

この図式が引き戻しであるとは,

$$B \times_Y X = \{(b, x) \in B \times X \mid g(b) = f(x)\}$$

とするとき, $a \mapsto (j(a), h(a))$ で定まる $A \rightarrow B \times_Y X$ が同相写像であること.

命題 1.9. 位相空間の次の引き戻し図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

このとき, f が Serre ファイブレーションならば, j も Serre ファイブレーション.

問題 1.2. このことを証明せよ.

1.2 CW 複体

定義 1.10. 位相空間 X が CW 複体であるとは, 次を満たす部分集合の列 (相対位相をもつ)

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$$

が存在すること.

- 各 $n \geq 0$ に対し, 球面 S^{n-1} からの写像の族 $\{\phi_\lambda: S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}\}_{\lambda \in \Lambda_n}$ が存在して,

$$X_n \cong X_{n-1} \cup_{\coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \phi_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} D^n$$

となる. ただし右辺には商位相が入っており, \cong は同相を表す.

- $X = \bigcup_{n \geq -1} X_n$ であり, X はこの部分集合族に関する商位相をもつ.

注意 1.11. X_{-1} として任意の部分集合をとることを許すと, 相対 CW 複体の定義を得る.

定義 1.12. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が弱ホモトピー同値写像とは、 $X \neq \emptyset$ のときは任意の点 $x_0 \in X$ に関するホモトピー群への誘導写像

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

が全単射となること。 $X = \emptyset$ のときは $Y = \emptyset$ となること。

注意 1.13. ホモトピー同値写像は弱ホモトピー同値写像だが、その逆は正しくない。

問題 1.3. CW 複体から Hawaiian earring と呼ばれる空間には弱ホモトピー同値写像は存在するが、逆向きの弱ホモトピー同値写像は存在しない。このことを証明せよ (Hawaiian earring の定義は各自で調べよ)。

命題 1.14. 任意の位相空間 X に対し、CW 複体 Y からの弱ホモトピー同値写像 $Y \rightarrow X$ が存在する。

定理 1.15 (J.H.C. Whitehead). CW 複体の間の弱ホモトピー同値写像はホモトピー同値写像である。

定義 1.16. 位相空間 X と Y が弱ホモトピー同値であるとは、CW 複体 Z と弱ホモトピー同値 $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y$ が存在することとする。

Serre ファイブレーションは定義の中で立方体の「被覆ホモトピー性質」を仮定したが、実は立方体だけでなく、すべての CW 複体に対しても同様の性質をもつ。

命題 1.17. Serre ファイブレーション $f: X \rightarrow Y$, CW 複体 A , 写像 $G: I \times A \rightarrow Y$, $g_0: A \rightarrow X$ に対し、 $fg(a) = G(0, a)$ が任意の $a \in A$ に対して成り立つならば、次を満たす写像 $g: I \times A \rightarrow X$ が存在する。

- 任意の $a \in A$ に対し $g(0, a) = g_0(a)$,
- 任意の $(s, a) \in I \times A$ に対し $fg(s, a) = G(s, a)$.

命題 1.18. Serre ファイブレーション $f: X \rightarrow Y$ に対し、 $y_0, y_1 \in Y$ が同じ弧状連結成分に属するならば、 $f^{-1}(y_0)$ と $f^{-1}(y_1)$ は弱ホモトピー同値。

問題 1.4. 命題 1.18 を証明せよ (他の定理や命題は使ってよい)。

これにより、Serre ファイブレーションのファイバーの「弱ホモトピー型」は、各弧状連結成分の上では変わらないことがわかる。

1.3 ホモトピーファイバーとホモトピーファイバー列

基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、次の引き戻し図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} F_f & \longrightarrow & PY \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ただし、

$$PX = \{\ell \in \text{Map}(I, Y) \mid \ell(1) = *\}$$

とし、写像 $p: PY \rightarrow Y$ は $p(\ell) = \ell(1)$ で定める。このとき、引き戻しであることから、 F_f は次のようになる。

$$F_f = \{(x, \ell) \in X \times PY \mid \ell(1) = f(x)\}$$

F_f を f のホモトピーファイバーという。 $p: PY \rightarrow Y$ は Serre ファイブレーションなので、 $F_f \rightarrow X$ もまた Serre ファイブレーションである。

問題 1.5. $p: PY \rightarrow Y$ が Serre ファイブレーションであることと、 PY が可縮であることを示せ。

F_f がホモトピーファイバーと呼ばれるのは、次の命題のように Serre ファイブレーションのファイバーと弱ホモトピー同値となるためである。

命題 1.19. 基点付き空間 Y への Serre ファイブレーション $f: X \rightarrow Y$ に対し、ファイバー $F = f^{-1}(*)$ からホモトピーファイバー F_f への自然な弱ホモトピー同値写像が存在する。

Proof. 引き戻し図式であることから、Serre ファイブレーション $F_f \rightarrow PY$ の基点のファイバーは F と同相であることが確認できる。したがって任意の $x_0 \in F$ に対し、次の長完全列が存在する。

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(PY) \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(F_f, x_0) \rightarrow \pi_n(PY) \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \pi_1(PY) \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(F_f, x_0) \rightarrow \pi_0(PY) \end{aligned}$$

PY は可縮なので、任意の $n \geq 0$ に対し、 $\pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(F_f, x_0)$ は全単射。ゆえに、ファイバーの包含写像 $F \rightarrow F_f$ は弱ホモトピー同値写像。 \square

位相空間の間の写像の列

$$F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

を考える。 Y は基点付き空間とする。 $f \circ i$ が定値写像にホモトピックであるとき、そのホモトピーを $H: I \times F \rightarrow Y$ とすると、 f のホモトピーファイバー F_f への写像 $F \rightarrow F_f$ が $x \mapsto (i(x), t \mapsto H(t, x))$ で定まる。この写像を自然な写像と呼ぶことにする。

定義 1.20. 隣り合った写像の合成の定値写像へのホモトピーが与えられた基点付き空間の写像の列

$$X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_2 \xrightarrow{f_1} X_1$$

を考える。この列がホモトピーファイバー列であるとは、各 $1 \leq k \leq n-2$ に対し、

$$X_{k+2} \xrightarrow{f_{k+1}} X_{k+1} \xrightarrow{f_k} X_k$$

が定める自然な写像 $X_{k+2} \rightarrow F_{f_k}$ が弱ホモトピー同値写像となること。

注意 1.21. X_3 は f_1 のホモトピーファイバーと弱ホモトピー同値なので、 X_3 の弱ホモトピー型は f_1 で決まる。写像 $f_2: X_3 \rightarrow X_2$ についても「適当な意味で」 f_1 で決まる。これを繰り返すと、ホモトピーファイバー列に現れる空間や写像は「適当な意味で」 f_1 のみですべて決まっていることになる。このことの逆を考えることが、ここでの目的の一つである。

$$\tilde{X} = \{(x, \ell) \in X \times \text{Map}(I, Y) \mid \ell(1) = f(x)\}$$

とし, $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ を $p(x, \ell) = \ell(0)$ とおく. すると, $x \mapsto (x, \text{定値写像})$ によりホモトピー同値写像 $X \rightarrow \tilde{X}$ が得られ,

$$X \xrightarrow{\cong} \tilde{X} \xrightarrow{p} Y$$

の合成は $f: X \rightarrow Y$ に一致する. さらに, $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ は Serre ファイブレーションとなり, $p^{-1}(*) = F_f$ となる. このことから, ホモトピーファイバー列

$$F_f \rightarrow X \rightarrow Y$$

は「ホモトピー同値を除いて」Serre ファイブレーションとすることができる. このことはコホモロジーの計算 (Serre スペクトル系列) などにおいて有用である.

基点付き空間 X に対し, X 上の基点付きループのなす空間を ΩX で表す. つまり, ΩX は次の引き戻し図式で定義される.

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & & \downarrow p \\ * & \longrightarrow & X \end{array}$$

基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ は基点付き空間の間の写像 $\Omega f: \Omega X \rightarrow \Omega Y$ を誘導する ($(\Omega f)(\ell) = f \circ \ell$). また, Ω は基点を保つホモトピー類を保つ.

補題 1.22. 基点付き空間の間の Serre ファイブレーション $f: X \rightarrow Y$ に対し, $\Omega f: \Omega X \rightarrow \Omega Y$ は Serre ファイブレーションである. さらに, $F = f^{-1}(*)$ とおくと, $(\Omega f)^{-1}(*) = \Omega F$ である.

問題 1.6. このことを証明せよ.

命題 1.23. 基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 次のホモトピーファイバー列が存在する.

$$\dots \rightarrow \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega \partial} \Omega F_f \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F_f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

Proof. $F_f \rightarrow X \rightarrow Y$ がホモトピーファイバー列であるのはよい. $i: F_f \rightarrow X$ は Serre ファイブレーションであり, ファイバーは $i^{-1}(*) = \Omega Y$ となる.

次の各四角形が引き戻しである図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} F_i & \longrightarrow & F_f & \longrightarrow & PY \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ PX & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} F_\partial & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ PF_f & \longrightarrow & F_f & \longrightarrow & X \end{array}$$

このことから, $F_i = PX \times_Y PY \simeq \Omega Y$, $F_\partial = PF_f \times_X PX \simeq \Omega X$ である. このホモトピー同値と写像 $F_\partial \rightarrow F_i$ と Ωf からなるホモトピー可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \xrightarrow{\cong} & F_\partial \\ \Omega f \downarrow & & \downarrow \\ \Omega Y & \xrightarrow{\cong} & F_i \end{array}$$

が存在することがわかる. このことから $\Omega f \circ \partial$ は定値写像とホモトピックであり,

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F_f$$

がホモトピーファイバー列であることが確認できる.

これよりも左側の部分については補題 1.22 から従う. □

このように, ホモトピーファイバー列は左側にはいくらでも延長することができる.

しかし, 一般にホモトピーファイバー列は右側には延長しない. 例えば, ホモトピーファイバー列

$$F \rightarrow X \rightarrow Y$$

が右に一段階延長すると仮定すると, 上の命題から F は適当な基点付き空間 Z の基点付きループ空間 ΩZ と弱ホモトピー同値でなければならない. しかしこれは一般には不可能である. 例えば, 種数 2 以上の曲面をファイバーとするファイバー束 $X \rightarrow Y$ を考えると, ファイバー F の基本群は非可換なので, 次の問題にあるように, F は基点付きループ空間と弱ホモトピー同値ではありえない. つまり, このようなファイバー束はホモトピーファイバー列として右には延長しない.

問題 1.7. 基点付き空間 F が H -空間であるとは, 写像 $m: F \times F \rightarrow F$ が存在して, $x \mapsto m(*, x)$ および $x \mapsto m(x, *)$ が恒等写像とホモトピックであることである.

(1) 基点付きループ空間 ΩZ は H -空間であることを示せ.

(2) H -空間の基本群は可換群であることを示せ.

2 幾何学的バー構成と代数的バー構成

2.1 幾何学的バー構成

幾何学的バー構成は Milgram により [Mil67] で導入されたようである (それまでに Milnor や Dold–Lashof による類似した構成は知られていたが). ここでの内容は [May72, May75] 等に準じている.

定義 2.1. 基点付き位相空間 G に写像 $m: G \times G \rightarrow G$ が与えられているとき, (G, m) が位相モノイドであるとは, m と基点を与える写像 $\eta: * \rightarrow G$ が次の図式を可換にすること.

$$\begin{array}{ccccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\text{id} \times m} & G \times G & * \times G & \xrightarrow{\eta \times \text{id}} & G \times G & \xleftarrow{\text{id} \times \eta} & G \times * \\ m \times \text{id} \downarrow & & \downarrow m & \cong \searrow & & \downarrow m & \swarrow \cong & \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & & & G & & \end{array}$$

二項演算の取り方に混乱がないときは $gg' = m(g, g')$ と書くことにする.

位相群は単位元を基点として位相モノイドになる. 位相モノイドの位相空間への右及び左からの作用も位相群の作用と同様に定義される.

定義 2.2. 位相モノイド G と右 G -空間 X , 左 G -空間 Y , 非負整数 $n \geq 0$ に対し,

$$\mathcal{B}_n(X, G, Y) = X \times G^{\times n} \times Y$$

とおき, 写像 $d_k: \mathcal{B}_n(X, G, Y) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(X, G, Y)$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$d_k(x, g_1, \dots, g_n, y) = \begin{cases} (xg_1, g_2, \dots, g_n, y) & k = 0 \\ (x, g_1, \dots, g_{k-1}, g_k g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n, y) & 0 < k < n \\ (x, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n y) & k = n \end{cases}$$

で定め, 写像 $s_k: \mathcal{B}_n(X, G, Y) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}(X, G, Y)$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$s_k(x, g_1, \dots, g_n, y) = (x, g_1, \dots, g_{k-1}, *, g_k, \dots, g_n, y)$$

で定める.

補題 2.3. 上の定義内の写像 d_k, s_k に対し, 次が成り立つ (*simplicial identities*).

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i & i < j \\ d_i s_j &= s_{j-1} d_i & i < j \\ d_j s_j &= d_{j+1} s_j = \text{id} \\ d_i s_j &= s_j d_{i-1} & i > j + 1 \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i & i \leq j \end{aligned}$$

注意 2.4. $[n]$ を $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ なる順序集合とする. 対象が $[n]$ ($n \geq 0$), 射が順序を保つ写像であるような圏を Δ と書く. 上の補題のように, *simplicial identities* を満たす写像が与えられているとき, 関手

$$\mathcal{B}_\bullet(X, G, Y): \Delta^{\text{op}} \rightarrow (\text{位相空間のなす圏}), \quad [n] \mapsto \mathcal{B}_n(X, G, Y)$$

が定まる. このような関手を単体的 (位相) 空間という. 同様に, 単体的集合, 単体的群などが定義される.

定義 2.5. 非負整数 $n \geq 0$ に対し, 標準 n -単体 Δ^n を次で定める.

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid t_0 + \dots + t_n \leq 1\}$$

また, 写像 $\partial_k: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$\partial_k(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{n-1})$$

で定め, 写像 $\sigma_k: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$\sigma_k(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{k-1}, t_k + t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{n+1})$$

で定める.

注意 2.6.

$$\Delta^\bullet: \Delta \rightarrow (\text{位相空間のなす圏}), \quad [n] \mapsto \Delta^n$$

が同様に定まる. このような関手を余単体的空間という.

定義 2.7.

$$B(X, G, Y) = \left(\coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times \mathcal{B}_n(X, G, Y) \right) / \sim$$

とおく. ただし, \sim は次で生成される同値関係とする.

$$\begin{aligned} (\partial_k t, x) &\sim (t, d_k x), & t \in \Delta^{n-1}, x \in \mathcal{B}_n(X, G, Y), 0 \leq k \leq n, \\ (\sigma_k t, x) &\sim (t, s_k x), & t \in \Delta^{n+1}, x \in \mathcal{B}_n(X, G, Y), 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

また,

$$B_n(X, G, Y) = \left(\coprod_{0 \leq i \leq n} \Delta^i \times \mathcal{B}_i(X, G, Y) \right) / \sim$$

により次のフィルトレーションが定まる.

$$X \times Y \cong B_0(X, G, Y) \subset B_1(X, G, Y) \subset \cdots \subset B(X, G, Y)$$

2.2 代数的バー構成

以下, 1 をもつ可換環 R をひとつ固定し, 加群やテンソル積はすべて R 上で考える. M_*, N_* を次数付き微分加群 (R 上の次数付き加群であって, 次数 (-1) の準同型 $d: M_* \rightarrow M_*$ が与えられていて, $d^2 = 0$. チェイン複体ともいう) とする. $M_* \otimes N_*$ を次で定める.

$$(M_* \otimes N_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$$

微分 d は次で定める.

$$d(x \otimes y) = (dx) \otimes y + (-1)^p x \otimes (dy), \quad x \in M_p, y \in N_q$$

これにより $M_* \otimes N_*$ は次数付き微分加群となる.

注意 2.8. このノートでは常にホモロジー的な次数付け (つまり微分の次数が (-1)) を採用している. しかし, 負の次数があっても支障のない議論をしているので, コホモロジー的な次数付け (つまり微分の次数が $(+1)$) の場合を知りたいければ, 単に次数をすべて (-1) 倍すればよい.

R は次数 0 が R , 他の次数は 0 であるような次数付き微分加群とすることにする. また, 次数付き微分加群の準同型とは, d と可換な次数付を保つ準同型のこととする.

定義 2.9. A_* を次数付き微分加群とする. A_* が次数付き微分代数であるとは, 次数付き微分加群の準同型 $m: A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$ と $\eta: R \rightarrow A_*$ が与えられていて, 次の図式を可換にすること.

$$\begin{array}{ccc} A_* \otimes A_* \otimes A_* & \xrightarrow{\text{id} \otimes m} & A_* \otimes A_* \\ m \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow m \\ A_* \otimes A_* & \xrightarrow{m} & A_* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R \otimes A_* & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & A_* \otimes A_* \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} A_* \otimes R \\ & \searrow \cong & \downarrow m \swarrow \cong \\ & & A_* \end{array}$$

定義 2.10. A_* を次数付き微分代数とすると、次数付き微分加群 M_* が右 A_* -加群であるとは、次数付き微分加群の準同型 $m: M_* \otimes A_* \rightarrow M_*$ が与えられていて、次の図式を可換にすること。

$$\begin{array}{ccc}
 M_* \otimes A_* \otimes A_* & \xrightarrow{\text{id} \otimes m} & M_* \otimes A_* & & M_* \otimes A_* & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & M_* \otimes R \\
 m \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow m & & m \downarrow & \swarrow \cong & \\
 M_* \otimes A_* & \xrightarrow{m} & M_* & & M_* & &
 \end{array}$$

左 A_* -加群も同様にして定義される。

以下、 $\eta(1) = 1$ と書き、積や作用を表す写像の記号 m は省略する。

定義 2.11. A_* を次数付き微分代数、 M_* を右 A_* -加群、 N_* を左 A_* -加群とする。このとき、

$$\mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*) = M_* \otimes A_*^{\otimes n} \otimes N_*$$

とおき、準同型 $d_k: \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(M_*, A_*, N_*)$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$d_k(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y) = \begin{cases} xa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y & k = 0 \\ x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes a_k a_{k+1} \otimes a_{k+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y & 0 < k < n \\ x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n y & k = n \end{cases}$$

で定め、準同型 $s_k: \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}(M_*, A_*, N_*)$ ($0 \leq k \leq n$) を

$$s_k(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y) = x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes 1 \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y$$

で定める。

これにより $\mathcal{B}_\bullet(M_*, A_*, N_*)$ は単体的次数付き微分加群になる。

補題 2.12. 上の定義内の写像 d_k, s_k に対し、次が成り立つ (*simplicial identities*) 。

$$\begin{aligned}
 d_i d_j &= d_{j-1} d_i & i < j \\
 d_i s_j &= s_{j-1} d_i & i < j \\
 d_j s_j &= d_{j+1} s_j = \text{id} \\
 d_i s_j &= s_j d_{i-1} & i > j + 1 \\
 s_i s_j &= s_{j+1} s_i & i \leq j
 \end{aligned}$$

集合 Δ_i^n (n, i は非負整数) を

$$\Delta_i^n = \{u: [i] \rightarrow [n] \mid u \text{ は順序を保つ写像}\}$$

とおき、 $R\Delta_i^n$ を Δ_i^n で生成される自由加群とする。 $d_k: \Delta_i^n \rightarrow \Delta_{i-1}^n, s_k: \Delta_i^n \rightarrow \Delta_{i+1}^n$ を次のように定義する。

$$(d_k u)(j) = \begin{cases} u(j) & j < k \\ u(j+1) & j \geq k \end{cases}$$

次のように $d: R\Delta_*^n \rightarrow R\Delta_*^n$ を定義すると, $R\Delta_*^n$ は次数付き微分加群となる.

$$du = \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k u$$

さらに, $\partial_k: \Delta_i^n \rightarrow \Delta_i^{n+1}, \sigma_k: \Delta_i^n \rightarrow \Delta_i^{n-1}$ を次で定義する.

$$(\partial_k u)(j) = \begin{cases} u(j) & u(j) < k \\ u(j) + 1 & u(j) \geq k \end{cases}$$

$$(\sigma_k u)(j) = \begin{cases} u(j) & u(j) \leq k \\ u(j) - 1 & u(j) > k \end{cases}$$

これにより $R\Delta_*^n$ は余単体的次数付き微分加群になる.

定義 2.13.

$$B(M_*, A_*, N_*) = \left(\bigoplus_{n \geq 0} R\Delta_*^n \otimes \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*) \right) / \sim$$

とおく. ただし, \sim は次で生成される同値関係とする.

$$\begin{aligned} \partial_k u \otimes x &\sim u \otimes d_k x, & u \in R\Delta_*^{n-1}, x \in \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*), 0 \leq k \leq n, \\ \sigma_k u \otimes x &\sim u \otimes s_k x, & u \in R\Delta_*^{n+1}, x \in \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*), 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

この定義から, 加群としては

$$B(M_*, A_*, N_*) = \bigoplus_{n \geq 0} R\Delta_*^n \otimes \mathcal{B}_n(M_*, A_*, N_*).$$

であり, 微分は次のようになる (恒等写像 $[n] \rightarrow [n]$ を ι_n と書くと, ι_n は $R\Delta_*^n$ の基底).

$$\begin{aligned} d(\iota_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y) &= \iota_{n-1} \otimes x a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \iota_{n-1} \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ (-1)^n \iota_{n-1} \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n y \\ &+ (-1)^n \iota_n \otimes dx \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|} \iota_n \otimes dx \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes da_k \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ (-1)^{n+|a_1|+\cdots+|a_n|} \iota_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes dy \end{aligned}$$

命題 2.14. A_* の M_* への作用から決まる写像 $\phi: B(M_*, A_*, A_*) \rightarrow M_*$ はホモロジーの同型を誘導する.

問題 2.1. 実際, 包含写像 $\psi: M_* \rightarrow B(M_*, A_*, A_*)$ ($x \mapsto \iota_0 \otimes x \otimes 1$) を用いると, $\phi \circ \psi = \text{id}$ となり, $\psi \circ \phi$ は恒等写像とチェインホモトピックとなる. このことを証明せよ (チェインホモトピーの定義は各自で調べよ).

このことから, M_*, A_* がともに R -加群として自由ならば, $B(M_*, A_*, A_*)$ は, M_* の右 A_* -加群としての自由分解 (free resolution) となる.

例 2.15. 上のことから, (次数付きでない) R -代数 A とその上の右加群 M および左加群 N に対し, M, A が R 上自由ならば,

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = H_i(B(M, A, N)) = H_i(B(M, A, A) \otimes_A N)$$

となる. このときは M, A, N はそれぞれ次数 0 の部分以外は自明なので, 上記の微分は次のように少し簡単になる.

$$\begin{aligned} d(\iota_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y) &= \iota_{n-1} \otimes xa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \iota_{n-1} \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \\ &+ (-1)^n \iota_{n-1} \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n y \end{aligned}$$

特に, Γ を群とし, A として群環 $A = R[\Gamma]$, $M = R$ を自明な Γ -加群とすると, 群ホモロジーを得る.

$$H_i(\Gamma; N) = H_i(B(R, R[\Gamma], N))$$

2.3 幾何学的バー構成と代数的バー構成

位相空間 X の特異チェーン複体を $S_*(X)$ とおく. 係数は 1 をもつ可換環 R とする. このとき, 自然なチェーンホモトピー同値写像 (Eilenberg–Zilber 写像)

$$S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\cong} S_*(X \times Y)$$

が存在する. Eilenberg–Zilber 写像と $1 \in R$ を 0-単体に移す写像 $R \rightarrow S_*(*)$ は次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} S_*(X) \otimes S_*(Y) \otimes S_*(Z) & \longrightarrow & S_*(X \times Y) \otimes S_*(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_*(X) \otimes S_*(Y \times Z) & \longrightarrow & S_*(X \times Y \times Z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \otimes S_*(X) & \longrightarrow & S_*(*) \otimes S_*(X) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ S_*(X) & \longleftarrow & S_*(*) \times X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S_*(X) \otimes S_*(*) & \longleftarrow & S_*(X) \otimes R \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ S_*(X \times *) & \xrightarrow{\cong} & S_*(X) \end{array}$$

位相モノイド G と右 G -空間 X , 左 G -空間 Y が与えられたとき, 上記の写像を用いて定まる

$$S_*(G) \otimes S_*(G) \xrightarrow{\cong} S_*(G \times G) \rightarrow S_*(G), \quad R \rightarrow S_*(*) \rightarrow S_*(X)$$

により, $S_*(G)$ は次数付き微分代数となる. 同様の構成により, $S_*(X)$ は右 $S_*(G)$ -加群, $S_*(Y)$ は左 $S_*(G)$ -加群となる.

問題 2.2. $S_*(G)$ が次数付き微分代数となることを, Eilenberg–Zilber 写像の自然性と上記の可換図式を用いて示せ.

命題 2.16. X, G, Y が T_1 -空間で、 G の単位元がホモトピー拡張性質をもつとき、次の自然な同型が存在する。

$$H_*(B(X, G, Y)) \cong H_*(B(S_*(X), S_*(G), S_*(Y)))$$

Outline of proof. 次のホモロジーの同型を誘導する写像を考える。

$$\begin{aligned} B(S_*(X), S_*(G), S_*(Y)) &= \left(\bigoplus_{n \geq 0} R\Delta_*^n \otimes \mathcal{B}_n(S_*(X), S_*(G), S_*(Y)) \right) \Big/ \sim \\ &\rightarrow \left(\bigoplus_{n \geq 0} S_*(\Delta^n) \otimes \mathcal{B}_n(S_*(X), S_*(G), S_*(Y)) \right) \Big/ \sim \\ &\rightarrow \left(\bigoplus_{n \geq 0} S_*(\Delta^n \times \mathcal{B}_n(X, G, Y)) \right) \Big/ \sim \rightarrow S_*(B(X, G, Y)) \end{aligned}$$

ただし、一つ目の写像は標準的な包含 $R\Delta_*^n \subset S_*(\Delta^n)$ から誘導される写像、二つ目の写像は Eilenberg–Zilber 写像から誘導される写像、三つ目の写像は商写像

$$\bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n \times \mathcal{B}_n(X, G, Y) \rightarrow B(X, G, Y)$$

から誘導される写像。これらの写像は、適当なフィルトレーションから定まるスペクトル系列に関して、 E^1 -項の同型を誘導する。したがってスペクトル系列の比較定理から、これらの写像はホモロジーの同型を誘導する。 \square

問題 2.3. この命題の証明の詳細を与えよ。つまり、証明中の 4 つの次数付き微分加群のフィルトレーションを具体的に与え、 E^1 -項の同型を導くことを示せ。特に、 $E_{p,q}^1 \cong H_q(X \times G^{\wedge p} \times Y)$ となることを示せ。ただし、 $A \wedge B = A \times B / (* \times B \cup A \times *)$ は基点付き空間のスマッシュ積を表し、 $A \times B = A \times B / A \times *$ 、 $A \rtimes B = A \times B / * \times B$ であるとする。(フィルトレーションから定まるスペクトル系列に関する詳細は各自で調べよ)。

この系として、次のことがわかる。

系 2.17. 離散群 Γ と R -加群 A に対し、群ホモロジー $H_*(\Gamma; A)$ は分類空間 $B\Gamma = B(*, \Gamma, *)$ のホモロジー $H_*(B\Gamma; A)$ と自然に同型。

Proof. 例 2.15 と、包含写像 $R[\Gamma] \rightarrow S_*(\Gamma)$ がホモロジー群の同型を誘導することを使おうと証明できる。 \square

3 幾何学的バー構成のホモトピーファイバー列への応用

この節の内容はここでの内容は [May75] 等に準じる部分が多い。が、その文献で主に扱っているのが主ファイブレーションであるのに対し、ここで主に扱っているのは単にモノイドの作用があるだけの空間である。

3.1 準備

まず、幾何学的バー構成に関する補題をふたつ用意する。

補題 3.1. 基点がホモトピー拡張性質を持つ群状位相モノイド G と、右 G -空間 X と点 $x_0 \in X$ 、左 G -空間 Y に対し、次はホモトピーファイバー列。

$$Y \rightarrow B(X, G, Y) \rightarrow B(X, G, *)$$

ただし、最初の写像は合成 $Y \cong \{x_0\} \times Y \rightarrow X \times Y \cong B_0(X, G, Y) \rightarrow B(X, G, Y)$ で定まる写像。

Proof. 準ファイブレーションを使った議論で証明できる（技術的）。[May75] を参照。 \square

補題 3.2. 位相モノイド G と右 G -空間 X に対し、包含写像 $X \rightarrow B(X, G, G)$ は X への G 作用から定まる $B(X, G, G) \rightarrow X$ をホモトピー逆写像にもつホモトピー同値写像（実は強変位レトラクト）。

Proof. $\Phi_n: I \times \Delta^n \times \mathcal{B}_n(X, G, G) \rightarrow \Delta^{n+1} \times \mathcal{B}_{n+1}(X, G, G)$ を次で定める。

$$\Phi_n(s, t, (x, g_1, \dots, g_{n+1})) = (((1-s)t, s), (x, g_1, \dots, g_{n+1}, *))$$

すると、 $\{\Phi_n\}$ はホモトピー $\Phi: I \times B(X, G, G) \rightarrow B(X, G, G)$ を誘導し、 Φ_0 は恒等写像、 Φ_1 は $X = X \times \{*\} \subset B(X, G, G)$ へのレトラクション（特に任意の s に対し $\Phi(s, x, *) = (x, *)$ なので強変位レトラクト）。 \square

注意 3.3. 上の補題は命題 2.14 の幾何学的バー構成版。

ホモトピーファイバーの構成において道の空間を使ったが³、以下の Moore path の空間に取り換えてもよい。

定義 3.4. 基点付き空間 X に対し、 X の長さ 1 以上の Moore path 空間とは、次の $P^M X$ のこと。

$$P^M X = \{(\ell, \beta) \in X^{[0, \infty)} \times [1, \infty) \mid \forall t \geq \beta, \ell(t) = *\}.$$

また、 X の基点をもつ Moore loop 空間とは、次の $\Omega^M X$ のこと。

$$\Omega^M X = \{(\ell, \beta) \in X^{[0, \infty)} \times [0, \infty) \mid \forall t \geq \beta, \ell(0) = \ell(t) = *\}.$$

次で定まる写像 $\Omega^M X \times \Omega^M X \rightarrow \Omega^M X$ および $P^M X \times \Omega^M X \rightarrow P^M X$ を考える。

$$((\ell, \beta), (\ell', \beta')) = (\ell + \ell', \beta + \beta') \quad \text{ただし} \quad (\ell + \ell')(t) = \begin{cases} \ell(t) & t \leq \beta \\ \ell'(t - \beta) & t \geq \beta \end{cases}$$

この演算により $\Omega^M X$ は位相モノイドとなる。さらに、 $P^M X$ は右 $\Omega^M X$ -空間となる。

補題 3.5. 基点付き空間 X に対し、 $P^M X$ は可縮（一点とホモトピー同値）であり、次はホモトピーファイバー列。

$$\Omega^M X \rightarrow P^M X \rightarrow X$$

ただし、 $P^M X \rightarrow X$ は $\ell \mapsto \ell(0)$ で与え、 $\Omega^M X \rightarrow P^M X$ は長さ 1 の定値道への作用で与える。

問題 3.1. $P^M X \rightarrow X$ が Serre ファイブレーションであることと、 $P^M X \rightarrow X$ の基点の上のファイバーが $\Omega^M X$ と上記の写像によりホモトピー同値であることを示せ。（これにより補題が従う）

問題 3.2. $P^M X$ を「長さ 0 以上の Moore path 空間」としたとき、 $P^M X \rightarrow X$ は Serre ファイブレーションになるとは限らないことを確認せよ（基点を含む弧状連結成分が基点のみからなる場合などを除き、ほとんどの場合で Serre ファイブレーションではない）。

問題 3.3. X の基点がホモトピー拡張性質をもつならば、 $\Omega^M X$ の基点もホモトピー拡張性質をもつことを示せ。

3.2 写像とモノイドの作用の対応

基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、引き戻し

$$\begin{array}{ccc} F^M(f) & \longrightarrow & P^M Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

により $F^M(f)$ を定義すると、 $\Omega^M Y$ の $P^M Y$ への右作用から $\Omega^M Y$ の $F^M(f)$ への右作用が誘導される。

補題 3.6. 次はホモトピーファイブレーション。

$$\Omega^M Y \rightarrow F^M(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

Proof. 通常の基点を持つ道の空間 PY と $P^M Y$ の間のホモトピー同値写像が次のように与えられる。 $P^M Y \rightarrow PY$ は (ℓ, β) を道 $t \mapsto \ell(\beta t)$ に対応させる写像、 $PY \rightarrow P^M Y$ は $\ell \mapsto (\ell, 1)$ 。この写像により、 f のホモトピーファイバー F との間のホモトピー同値写像 $F^M(f) \simeq F$ を得る。また、上の四角形は Serre ファイブレーションの引き戻しなので、左の 3 項がホモトピーファイバー列となることがわかる。 \square

また、右 G -空間 F が与えられたとき、

$$B(F, G, *) \rightarrow B(*, G, *) = BG$$

によって対応する写像を定める。

3.2.1 写像から作用を与え、作用から写像を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻ることに

まず基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。ただし、 Y は弧状連結と仮定しておく。すると、右 $\Omega^M Y$ -空間 $F^M(f)$ が定まる。これより写像 $B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \rightarrow B\Omega^M Y$ が定まる。このとき、次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc} B(F^M(f), \Omega^M Y, *) & \xlongequal{\quad} & B(F^M(f), \Omega^M Y, *) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B(*, \Omega^M Y, *) & \longleftarrow & B(P^M Y, \Omega^M Y, *) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ただし、 $B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \rightarrow X$ は射影 $F^M(f) \rightarrow X$ から定まる写像、 $B(P^M Y, \Omega^M Y, *) \rightarrow Y$ は射影 $P^M Y \rightarrow Y$ から定まる写像。すると、以下のようにして横向きの写像はすべて弱ホモトピー同値であることがわかる。

補題 3.7. Y の基点がホモトピー拡張性質をもつならば、 $B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \rightarrow X$ は弱ホモトピー同値。

Proof. $\Omega^M Y$ は基点がホモトピー拡張性質をもつ群状位相モノイドであることから、次のホモトピーファイブレーションの間の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^M Y & \longrightarrow & B(F^M(f), \Omega^M Y, \Omega^M Y) & \longrightarrow & B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \\ \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Omega^M Y & \longrightarrow & F^M(f) & \longrightarrow & X \end{array}$$

ここで、真ん中の縦の写像は補題 3.2 よりホモトピー同値。この図式はホモトピー完全列の間の写像を誘導するので、five lemma から、 $\pi_i(B(F^M(f), \Omega^M Y, *)) \rightarrow \pi_i(X)$ は $i > 0$ で同型写像。 $i = 0$ のときも全単射であることが確認できる。 X の基点以外の弧状連結成分についても同様に確認できる。 ゆえに、 $B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \rightarrow X$ は弱ホモトピー同値。 \square

問題 3.4. $\pi_0(B(F^M(f), \Omega^M Y, *)) \rightarrow \pi_0(X)$ が全単射であることを確認せよ (ヒント: 完全列 $\pi_1(Y) (\cong \pi_0(\Omega^M Y)) \rightarrow \pi_0(F^M(f)) \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ とバー構成の定義 (特に B_0 と B_1 に注目すればよい) を使う)。

補題 3.8. Y の基点がホモトピー拡張性質をもつならば、 $B(P^M Y, \Omega^M Y, *) \rightarrow B(*, \Omega^M Y, *)$ は弱ホモトピー同値。

Proof. $\Omega^M Y$ は基点がホモトピー拡張性質をもつ群状位相モノイドであることから、次のホモトピーファイブレーションの間の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^M Y & \longrightarrow & B(P^M(f), \Omega^M Y, \Omega^M Y) & \longrightarrow & B(P^M(f), \Omega^M Y, *) \\ \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Omega^M Y & \longrightarrow & B(*, \Omega^M Y, \Omega^M Y) & \longrightarrow & B(*, \Omega^M Y, *) \end{array}$$

ここで、真ん中の縦の写像は補題 3.2 よりホモトピー同値。この図式はホモトピー完全列の間の写像を誘導するので、five lemma から、 $\pi_i(B(P^M Y, \Omega^M Y, *)) \rightarrow \pi_i(B(*, \Omega^M Y, *))$ は $i > 0$ で同型写像。 $B(P^M Y, \Omega^M Y, *)$ と $B(*, \Omega^M Y, *)$ が弧状連結であることはバー構成の定義から確認できる。 ゆえに、 $B(P^M Y, \Omega^M Y, *) \rightarrow B(*, \Omega^M Y, *)$ は弱ホモトピー同値。 \square

補題 3.9. Y の基点がホモトピー拡張性質をもつならば、 $B(P^M Y, \Omega^M Y, *) \rightarrow Y$ は弱ホモトピー同値。

Proof. 補題 3.7 を f が恒等写像 $Y \rightarrow Y$ の場合に適用すればよい。 \square

3.2.2 作用から写像を与え、写像から作用を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻る

弱ホモトピー同値である自然な準同型 $G \rightarrow \Omega^M B G$ もしくは $\Omega^M B G \rightarrow G$ があればこのようなことが証明できるが、一般にそのような準同型は存在しない。 A_∞ の観点から解決できるものと思われるが、きちんと書かれた文献はないように思われる。

群作用に関するモデル圏の Quillen 同値の観点からは、定式化が知られている。

3.3 写像とモノイドの準同型の対応

基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、

$$\Omega^M f: \Omega^M X \rightarrow \Omega^M Y$$

によって対応するモノイド準同型を与える。

また、モノイド準同型 $\phi: G \rightarrow H$ が与えられたとき、

$$B\phi: B G \rightarrow B H$$

によって対応する基点付き空間の間の写像を与える。

3.3.1 写像からモノイド準同型を与え、モノイド準同型から写像を与えると、弱ホモトピー同値を除いて元に戻る

この場合は弧状連結な基点付き空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ をまず考える。これに対しモノイド準同型 $\Omega^M f: \Omega^M X \rightarrow \Omega^M Y$ が定まり、基点付き空間の間の写像

$$B\Omega^M f: B\Omega^M X \rightarrow B\Omega^M Y$$

が定まる。すると、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} B\Omega^M X & \longleftarrow & B(P^M X, \Omega^M X, *) & \longrightarrow & X \\ B\Omega^M f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ B\Omega^M Y & \longleftarrow & B(P^M Y, \Omega^M Y, *) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

3.2.1 節と同様の議論により横方向の写像はすべて弱ホモトピー同値となる。

この場合も 3.2.2 節と同様に直接のモノイド準同型は構成できない。後で A_∞ の観点から解決する。

3.4 ホモトピーファイバー列の recognition principle

ある基点付き位相空間 X が基点付きループ空間 ΩY あるいは n 重ループ空間 $\Omega^n Y$ (S^n から Y への基点付き写像のなす空間と同相) のホモトピー型をもつための条件を与えることが、かつて問題とされた (1960 年代~1970 年代前半くらい)。オペラッド (operad) という概念を用いて、May [May72] や Boardman–Vogt [BV73] らにより、次のように定式化された (**recognition principle** という)。

X が n 重ループ空間のホモトピー型をもつための必要十分条件は、 X が群状な E_n -オペラッド上の代数 (E_n -空間) となることである。

つまり、 X の E_n -空間としての構造は、 $X \simeq \Omega^n Y$ となる空間 Y と同じだけの情報をもっている。

同じように、写像に対しても recognition principle を考えることができる。ここでは写像の recognition principle とは、ホモトピーファイバー列全体を復元するのに必要な構造のことと考える。まず次のホモトピーファイバー列を考える。

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega \partial} \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

もちろん写像 $f: X \rightarrow Y$ はこのホモトピーファイバー列全体を復元できる。しかし、例えば写像 $\partial: \Omega Y \rightarrow F$ だけではこのホモトピーファイバー列全体を復元できない。そこで、写像だけ考えるのではなく、前節のように $\Omega^M Y$ の $F^M(f)$ への右作用を考えると、ホモトピーファイバー列

$$\Omega^M Y \rightarrow F^M(f) \rightarrow B(F^M(f), \Omega^M Y, *) \rightarrow B\Omega^M Y$$

が得られるので、元のホモトピーファイバー列全体を弱ホモトピー同値を除いて復元することができる (Y が弧状連結であれば、だが)。写像 Ωf をモノイド準同型として考えた場合も同様に全体を復元することができる (X と Y が弧状連結であれば、だが)。

以上をまとめると、ホモトピーファイバー列の recognition principle は以下のようになる。

$$\Omega X \xrightarrow{\text{モノイド準同型}} \Omega Y \xrightarrow{\text{モノイド作用}} F \xrightarrow{?} X \xrightarrow{\text{(ただの) 写像}} Y$$

注意 3.10. ホモトピーファイバーの包含写像 $i: F \rightarrow X$ の特徴づけについては「主ファイブレーション」(主束の一般化) が知られているが、これは左隣に現れる ΩY の作用を使って特徴づけるので、写像 i の構造とは言いがたい。写像 i に関する recognition principle と言えるものについては、まだ知られていないように思われる。

注意 3.11. より左の項については $\Omega^n X \rightarrow \Omega^n Y$ は E_n -空間の間の写像 (E_n -写像)、 $\Omega^{n-1} F$ への $\Omega^n Y$ の作用については Swiss-cheese operad と呼ばれるオペラッドの作用で特徴づけることができる (より正確には、多重ループ空間は低い次数のホモトピー群の情報を失うため、 X や Y に適当な連結性を仮定しなければならない)。やはり $\Omega^n F \rightarrow \Omega^n X$ に対応する構造は知られていないように思われる。

4 A_∞ -空間と A_∞ -代数

A_∞ -空間や代数の定義は原論文 [Sta63] など。 A_∞ -写像については定義が得られるまでに時間がかかっているが、一般の場合は Boardman–Vogt [BV73] により定義された。 A_∞ -写像のパラメータ空間 (multiplihedra) の組み合わせ論については [IM89] で与えられている。 A_∞ -代数については [Kel01] や [LV12] (ただし A_∞ -代数がメインの本ではない) など、より新しいものもある。

4.1 A_∞ -空間と結合多面体

4.1.1 高次ホモトピー結合性

ここでは A_∞ 空間を考える動機と定義の概要を説明する。

基点付き空間 X の基点付きループ空間 ΩX は次で定まる二項演算 $m: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ を持つのであった。

$$m(\ell_1, \ell_2)(t) = \begin{cases} \ell_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \ell_2(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3つのループをつなげる方法は次の2通りがある。

$$m(\ell_1, m(\ell_2, \ell_3))(t) = \begin{cases} \ell_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \ell_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \ell_3(4t-3) & t \geq \frac{3}{4} \end{cases} \quad m(m(\ell_1, \ell_2), \ell_3)(t) = \begin{cases} \ell_1(4t) & t \leq \frac{1}{4} \\ \ell_2(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \ell_3(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

これらのループは基点を保ってホモトピックである。このホモトピーを

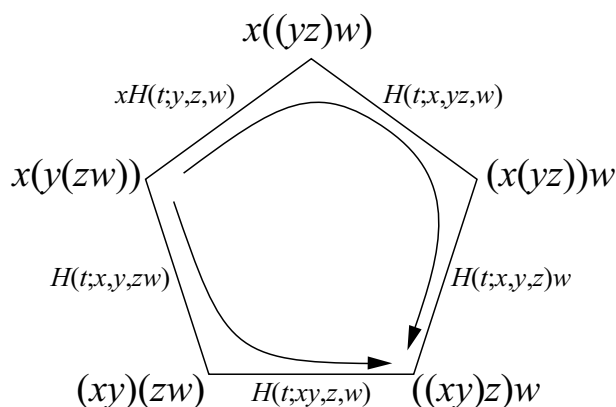
$$H: I \times \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

とする。このように、二項演算が up to homotopy で結合的であるという性質をホモトピー結合性という。

4つのループのつなげ方を考える場合は次の5通りがある。

$$m(\ell_1, m(\ell_2, m(\ell_3, \ell_4))) \quad m(\ell_1, m(m(\ell_2, \ell_3), \ell_4)) \quad m(m(\ell_1, m(\ell_2, \ell_3)), \ell_4) \\ m(m(\ell_1, \ell_2), m(\ell_3, \ell_4)) \quad m(m(m(\ell_1, \ell_2), \ell_3), \ell_4)$$

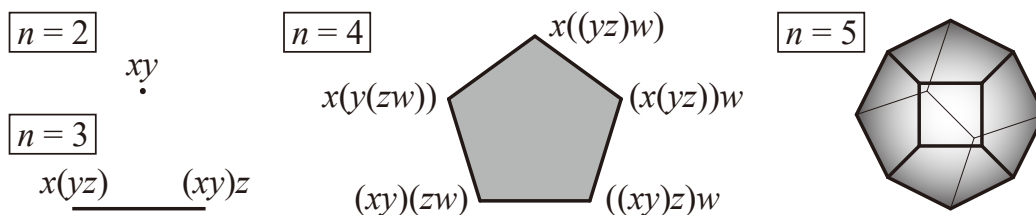
どのふたつもただホモトピックであるだけでなく、 H を使ったホモトピーをつなげることによってホモトピーが与えられる。ただし、そのホモトピーは下図の通り2通りの取り方がある。



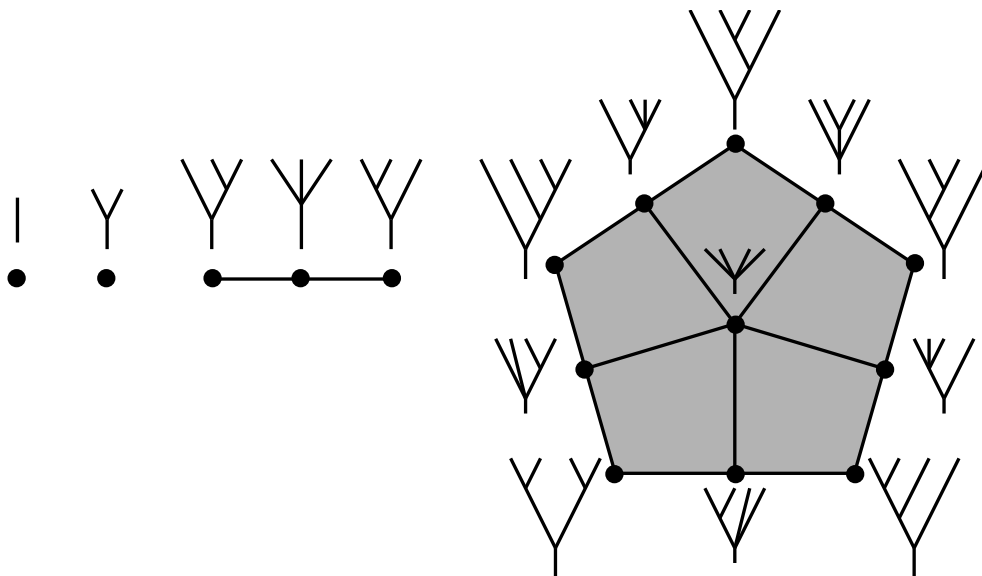
これらは各ループの速さを変えるだけのホモトピーなので、実はこれらのホモトピーは「ホモトピーとしてホモトピック」である。つまり上の図でいえば、「五角形の境界で定義された連続なループの族が五角形の内側に連続に拡張する」ということである。同様のことが5個以上のループのつなぎ方を考える際にも考えられる。このようにして二項演算の高次ホモトピー結合性を特徴づけることができる。

4.1.2 結合多面体

前節で見たように、高次ホモトピー結合性を定式化するには、その高次ホモトピーのパラメータ空間を与える必要がある。 n 個の積のホモトピー結合性は n -次結合多面体 (associahedron) \mathcal{K}_n ($n = 1, 2, \dots$) と呼ばれる多面体でパラメトライズされる。小さい n については下図のようになる。



この多面体は適切な設定の下で「 n 個の葉をもつ planar rooted tree のなす順序集合の幾何学的実現」として与えられる。



面作用素

$$\partial_k: \mathcal{K}_r \times \mathcal{K}_s \rightarrow \mathcal{K}_{r+s-1} \quad (1 \leq k \leq r)$$

は tree の言葉では「 $\partial_k(\rho, \sigma)$ は tree ρ の左から k 番目の葉に σ を接ぎ木して得られる tree」と特徴づけられる。 \mathcal{K}_n の境界 $\partial\mathcal{K}_n$ は

$$\partial\mathcal{K}_n = \bigcup_{\substack{r+s-1=n \\ 1 \leq k \leq r}} \partial_k(\mathcal{K}_r \times \mathcal{K}_s)$$

と表される。

命題 4.1. 対 $(\mathcal{K}_n, \partial\mathcal{K}_n)$ は (D^{n-2}, S^{n-3}) と同相。また、各面作用素 ∂_k は位相的な埋め込みで、それぞれの像は境界でしか交わらない。

これより \mathcal{K}_n は CW 複体の構造をもち、各 ∂_k は胞体写像。

定義 4.2. 位相空間 G に対し、連続写像の族 $\{m_i: \mathcal{K}_i \times G^{\times i} \rightarrow G\}_{i \geq 2}$ が G の A_∞ -形式とは、次の条件式を満たすこと。

$$m_{r+s-1}(\partial_k(\rho, \sigma); g_1, \dots, g_{r+s-1}) = m_r(\rho; g_1, \dots, g_{k-1}, m_s(\sigma; g_k, \dots, g_{k+s-1}), g_{k+s}, \dots, g_{r+s-1})$$

A_∞ -形式との対 $(G, \{m_i\}_{i \geq 2})$ を A_∞ -空間という。

注意 4.3. 結合多面体には退化作用素

$$s_k: \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_{n-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

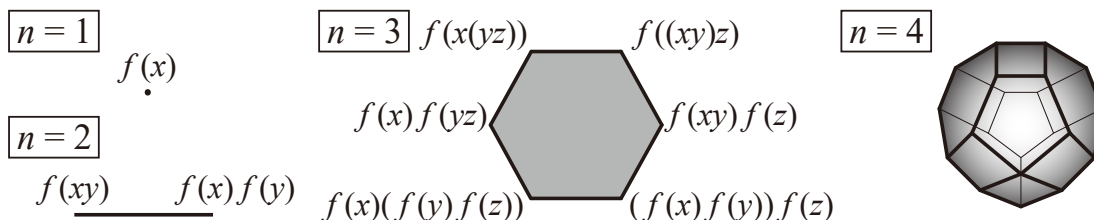
が定義される。これを用いて A_∞ -形式の単位元を定義することができる。単位元についてはこのノートでは扱わない。

例 4.4. 位相モノイド G は次の標準的な A_∞ -形式によって A_∞ -空間となる。

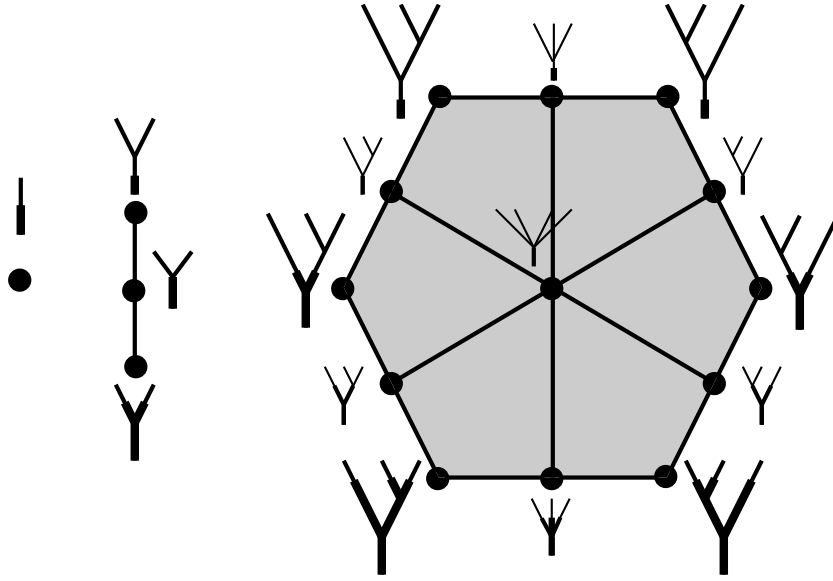
$$m_i(\rho; g_1, \dots, g_i) = g_1 \cdots g_i$$

4.2 A_∞ -写像と multiplihedra

A_∞ -空間の間の写像を定式化するためにも別のパラメータ空間が必要である。そのパラメータ空間として使われる **multiplihedron** (このノートを書いた時点ではまだ日本語の名前はついていないようである) という多面体がある。 n 次 multiplihedron \mathcal{J}_n ($n = 1, 2, \dots$) は小さい n に対しては下図のようになる。



この多面体も「 n 個の葉をもつ painted tree のなす順序集合の幾何学的実現」として与えられる。



painted tree の接ぎ木は「painted tree の葉への painted でない tree の接ぎ木」と「tree 全体が painted である tree に対して painted tree を接ぎ木」の 2 種類があるので、それに対応して 2 通りの面作用素がある。

$$\begin{aligned}
 \delta_k: \mathcal{J}_r \times \mathcal{K}_s &\rightarrow \mathcal{J}_{r+s-1} & 1 \leq k \leq r \\
 \delta: \mathcal{K}_r \times \mathcal{J}_{s_1} \times \cdots \times \mathcal{J}_{s_r} &\rightarrow \mathcal{J}_{s_1+\cdots+s_r}
 \end{aligned}$$

境界 $\partial\mathcal{J}_n$ は次で定義される。

$$\partial\mathcal{J}_n = \bigcup_{\substack{r+s-1=n \\ 1 \leq k \leq r}} \delta_k(\mathcal{J}_r \times \mathcal{K}_s) \cup \bigcup_{s_1+\cdots+s_r=n} \delta(\mathcal{K}_r \times \mathcal{J}_{s_1} \times \cdots \times \mathcal{J}_{s_r})$$

命題 4.5. 対 $(\mathcal{J}_n, \partial\mathcal{J}_n)$ は (D^{n-1}, S^{n-2}) と同相。また、各面作用素 δ_k, δ は位相的な埋め込みで、それぞれの像は境界でしか交わらない。

これより \mathcal{J}_n は CW 複体の構造をもち、各 δ_k, δ は胞体写像。

定義 4.6. A_∞ -空間 $(G, \{m_i\}_i), (G', \{m'_i\}_i)$ と写像 $f: G \rightarrow G'$ に対し、連続写像の族 $\{f_i: \mathcal{J}_i \times G^{\times i} \rightarrow G'\}_{i \geq 1}$ が f の A_∞ -形式とは、次の条件式を満たすこと。

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f \\
 f_{r+s-1}(\delta_k(\rho, \sigma); g_1, \dots, g_{r+s-1}) \\
 &= f_r(\rho; g_1, \dots, g_{k-1}, m_s(\sigma; g_k, \dots, g_{k+s-1}), g_{k+s}, \dots, g_{r+s-1}) \\
 f_{s_1+\cdots+s_r}(\delta(\rho; \sigma_1, \dots, \sigma_r); g_1, \dots, g_{s_1+\cdots+s_r}) \\
 &= m'_r(\rho; f_{s_1}(\sigma_1; g_1, \dots, g_{s_1}), \dots, f_{s_r}(\sigma_r; g_{s_1+\cdots+s_{r-1}+1}, \dots, g_{s_1+\cdots+s_r}))
 \end{aligned}$$

A_∞ -形式との対 $(f, \{f_i\}_{i \geq 1})$ を A_∞ -写像という。

注意 4.7. multiplihedron には退化作用素

$$d_k: \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{J}_{n-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

が定義される。これを用いて写像の A_∞ -形式の単位元を定義することができる。これについてもこのノートでは扱わない。

例 4.8. 位相モノイド G, G' に標準的な A_∞ -形式 (例 4.4) を与えて A_∞ -空間と思う. モノイド準同型 $f: G \rightarrow G'$ は次の標準的な A_∞ -形式によって A_∞ -写像となる.

$$f_i(\rho; g_1, \dots, g_i) = f(g_1 \cdots g_i) = f(g_1) \cdots f(g_i)$$

例 4.9. G を位相モノイドとするとき, 写像 $\eta: G \rightarrow \Omega^M BG$ を

$$\eta(g)(t) = [1-t, t; g] \quad (1-t, t) \in \Delta^1, g \in G$$

なる長さ 1 のループとして定める. この写像は補題 3.2 で与えたホモトピーから得られる可換図式

$$\begin{array}{ccc} EG & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & P^M BG \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \xlongequal{\quad} & BG \end{array}$$

がファイバーに誘導する写像に一致するので, G と G' がともに基点がホモトピー拡張性質をもち, 群状ならば, η は弱ホモトピー同値写像.

η はモノイドの準同型写像ではないが, 次のようにして A_∞ -写像であることがわかる.

$$\eta(g_1 g_2)(t) = [1-t, t; g_1 g_2] = [1-t, 0, t; g_1, g_2]$$

および

$$(\eta(g_1) + \eta(g_2))(t) = \begin{cases} [1-t, t; g_1] = [1-t, t, 0; g_1, g_2] & 0 \leq t \leq 1 \\ [2-t, t-1; g_2] = [0, 2-t, t-1; g_1, g_2] & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

が成り立つ. $\Delta^2 \times [0, \infty)$ が可縮であることに注意すれば, これらの間に自然なホモトピーが存在することがわかる. これによって $\eta_2: \mathcal{J}_2 \times G^{\times 2} \rightarrow \Omega^M BG$ を定義する. 同じように考えて, $\Delta^n \times [0, \infty)$ が可縮であることから, $\eta_n: \mathcal{J}_n \times G^{\times n} \rightarrow \Omega^M BG$ が帰納的に定義される. ゆえに, A_∞ -写像 $(\eta, \{\eta_i\}_i): G \rightarrow \Omega^M BG$ を得る.

なお, A_∞ -形式 $\{\eta_i\}_i$ は構成のしかたから次の意味で自然: モノイド準同型 $f: G \rightarrow G'$ に対し,

$$\Omega^M Bf(\eta_i(\rho; g_1, \dots, g_i)) = \eta_i(\rho; f(g_1), \dots, f(g_i))$$

これらから, G と $\Omega^M BG$ は「 A_∞ -空間として弱ホモトピー同値」であり, 自然な A_∞ -空間として弱ホモトピー同値写像 η を通して準同型 $f: G \rightarrow G'$ と $\Omega^M Bf: \Omega^M BG \rightarrow \Omega^M BG'$ は同値と言える. これが 3.3.1 節でのモノイド準同型に関するからモノイド準同型を復元する操作にあたる.

4.3 A_∞ -代数とその間の射

\mathcal{K}_n ($n = 2, 3, \dots$) は面作用素が胞体写像となるような CW 複体の構造をもつのであった.

一般に, CW 複体 X には

$$C_p(X) = \bigoplus_{c: p\text{-cell}} Rc$$

で定まる次数付き R -加群 $C_*(X)$ は「境界を取る」ことで定まる適当な微分 $d: C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ によって次数付き微分加群となる. これを CW 複体に付随する次数付き微分加群ということにする. CW 複体に付随する次数付き微分加群を取る操作は胞体写像に関して関手的であることが知られている.

これにより次数付き微分加群の族 $C_*(\mathcal{K}_n)$ ($n = 2, 3, \dots$) と準同型の族

$$\partial_k: C_*(\mathcal{K}_r) \otimes C_*(\mathcal{K}_s) \rightarrow C_*(\mathcal{K}_{r+s-1}) \quad 1 \leq k \leq r$$

が定まる。これを用いて次の定義ができる。

定義 4.10. 次数付き微分加群 A_* に対し、次数付き微分加群の準同型の族 $\{m_i: C_*(\mathcal{K}_n) \otimes A_*^{\otimes n} \rightarrow A_*\}$ が A_* の A_∞ -形式であるとは、次の条件式を満たすこと。

$$\begin{aligned} & m_{r+s-1}(\partial_k(\rho \otimes \sigma) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1}) \\ &= (-1)^{|\sigma|(|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|)} m_r(\rho \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes m_s(\sigma \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_{k+s-1}) \otimes a_{k+s} \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1}) \end{aligned}$$

ただし、 $|a_i|$ は a_i の次数を表す (つまり $a_i \in A_{|a_i|}$)。 A_∞ -形式との対 $(A_*, \{m_i\}_{i \geq 2})$ を A_∞ -代数という。

注意 4.11. この場合もやはり単位元に関する条件を考えることができるが、ここでは触れない。

注意 4.12. A_∞ -代数の定義としてよく採用される形は以下のようにして得られる。各 \mathcal{K}_n の $(n-2)$ 次元の胞体に適当な向きを与えて $\tau_n \in C_{n-2}(\mathcal{K}_n)$ とおく。すると、CW 構造から

$$d\tau_n = \sum_{\substack{r+s-1=n \\ 1 \leq k \leq r}} (-1)^{k-1+s(n-k)} \partial_k(\tau_r \otimes \tau_s)$$

と書けることがわかる。ここで符号は各 τ_n の向きと境界に自然に誘導される向きをきちんと見ることで決まる。このことから、 A_∞ -形式の定義と、 m_n が次数付き微分加群の準同型であることを組み合わせると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} & dm_n(\tau_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= \sum_{\substack{r+s-1=n \\ 1 \leq k \leq r}} (-1)^{k-1+s(n-k+|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|)} m_r(\tau_r \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes m_s(\tau_s \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_{k+s-1}) \otimes a_{k+s} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^{n+|a_1|+\cdots+|a_{j-1}|} m_n(\tau_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes da_j \otimes \cdots \otimes a_n) \end{aligned}$$

この式を用いて、 $m_n(\tau_n \otimes \cdots)$ の部分を単に次数 $(n-2)$ の準同型 m_n と書いて A_∞ -代数を定義することも多い。

$p < n-2$ のとき、 $C_p(\mathcal{K}_n)$ が面作用素の像で生成されることに注意すれば、 A_∞ -形式に現れる各 m_n は $m_n(\tau_n \otimes \cdots)$ の部分さえ決めてしまえば、他の ρ に対する $m_n(\rho \otimes \cdots)$ は $i < n$ なる m_i たちから自動的に決まってしまうことがわかる。

例 4.13. A_* が次数付き微分代数のとき、

$$m_n(\tau_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_1 a_2 & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

と定義すれば、 $(A_*, \{m_i\}_i)$ は A_∞ -代数。この A_∞ -形式を標準的な A_∞ -形式という。

問題 4.1. 注意 4.12 の $d\tau_n$ の式を用いて、実際に上の例における $\{m_i\}_i$ が A_∞ -形式となっていること (特に、各 m_i が次数付き微分加群の準同型となること) を確認せよ。

\mathcal{J}_n の CW 複体構造から $C_*(\mathcal{J}_n)$ も同様に定義され, 準同型

$$\begin{aligned}\delta_k &: C_*(\mathcal{J}_r) \otimes C_*(\mathcal{K}_s) \rightarrow C_*(\mathcal{J}_{r+s-1}) \quad 1 \leq k \leq r \\ \delta &: C_*(\mathcal{K}_r) \otimes C_*(\mathcal{J}_{s_1}) \otimes \cdots \otimes C_*(\mathcal{J}_{s_r}) \rightarrow C_*(\mathcal{J}_{s_1+\cdots+s_r})\end{aligned}$$

が誘導される.

定義 4.14. A_∞ -代数 $(A_*, \{m_i\}_i)$, $(A'_*, \{m'_i\}_i)$ と次数付き微分加群の準同型 $f: A_* \rightarrow A'_*$ に対し, 次数付き微分加群の準同型の族 $\{f_i: C_*(\mathcal{J}_i) \otimes A_*^{\otimes i} \rightarrow A'_*{}^{\otimes i}\}_{i \geq 1}$ が f の A_∞ -形式とは, 次の条件式を満たすこと.

$$\begin{aligned}f_1 &= f \\ f_{r+s-1}(\delta_k(\rho \otimes \sigma) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1}) \\ &= (-1)^{|\sigma|(|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|)} f_r(\rho \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes m_s(\sigma \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_{k+s-1}) \otimes a_{k+s} \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1}) \\ f_{s_1+\cdots+s_r}(\delta(\rho \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s_1+\cdots+s_r}) \\ &= \pm m'_r(\rho \otimes f_{s_1}(\sigma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s_1}) \otimes \cdots \otimes f_{s_r}(\sigma_r \otimes a_{s_1+\cdots+s_{r-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_{s_1+\cdots+s_r}))\end{aligned}$$

ただし $\pm = \sum_{j=2}^r |\sigma_j|(|a_1| + \cdots + |a_{s_1+\cdots+s_{j-1}}|)$

A_∞ -形式との対 $(f, \{f_i\}_{i \geq 1})$ を A_∞ -代数の射 (morphism of A_∞ -algebras) という.

注意 4.15. A_∞ -代数の射についても単位元の条件を考えることができるがここでは扱わない.

注意 4.16. Stasheff は「 A_∞ -空間の間の射」にあたるものを, 前節で定義した A_∞ -写像と, 条件

$$f(m_n(\rho; g_1, \dots, g_n)) = m'_n(\rho; f(g_1), \dots, f(g_n))$$

で定義される A_∞ -準同型 (A_∞ -homomorphism) を区別していた (A_∞ -準同型は自然に A_∞ -写像となる). しかし, 上の定義で与えた A_∞ -代数の射のことも A_∞ -homomorphism と呼ぶことがあるようであり, 少し紛らわしいかもしれない.

注意 4.17. A_∞ -代数の射の A_∞ -形式の条件も同様に次の形で与えることもある (符号は複雑なので \pm で略記している). ここで, $\tau'_n \in C_{n-1}(\mathcal{J}_n)$ を適切な向きに対応する基底とする.

$$\begin{aligned}df_n(\tau'_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= \sum_{\substack{r+s-1=n \\ 1 \leq k \leq r}} \pm f_r(\tau_r \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes m_s(\tau_s \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_{k+s-1}) \otimes a_{k+s} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &+ \sum_{s_1+\cdots+s_r=n} \pm m'_r(\tau_r \otimes f_{s_1}(\tau'_{s_1} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s_1}) \otimes \cdots \otimes f_{s_r}(\tau'_{s_r} \otimes a_{s_1+\cdots+s_{r-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n)) \\ &+ \sum_{j=1}^n \pm f_n(\tau'_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes da_j \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n)\end{aligned}$$

例 4.18. 次数付き微分代数の準同型 $f: A_* \rightarrow A'_*$ に対し,

$$f_n(\tau'_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} f(a_1) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

と定義すれば, $(f, \{f_i\}_i)$ は A_∞ -代数の間の射. この A_∞ -形式を標準的な A_∞ -形式という.

4.4 A_∞ -空間から A_∞ -代数への対応

tree のなす半順序集合の幾何学的実現としての構造を使うと、結合多面体や multiplihedron は自然に単体複体の構造をもつ（各胞体が三角形分割される）。これより、面作用素と可換な CW 複体に付随する次数付き微分加群から特異チェーンのなす次数付き微分加群への準同型

$$C_*(\mathcal{K}_n) \rightarrow S_*(\mathcal{K}_n), \quad C_*(\mathcal{J}_n) \rightarrow S_*(\mathcal{J}_n)$$

を得る。

$(G, \{m_i\}_i)$ を A_∞ -空間とする。このとき、可換図式

$$\begin{array}{ccc} C_*(\mathcal{K}_n) \otimes S_*(G)^{\otimes n} & \xrightarrow{m_n} & S_*(G) \\ \downarrow & & \parallel \\ S_*(\mathcal{K}_n) \otimes S_*(G)^{\otimes n} & & \\ \downarrow & & \\ S_*(\mathcal{K}_n \times G^{\times n}) & \xrightarrow{m_n} & S_*(G) \end{array}$$

によって A_∞ -形式 $\{m_i\}_i$ が定まり、 $(S_*(G), \{m_i\}_i)$ は A_∞ -代数となることが確認できる。

同じように、 A_∞ -写像 $(f, \{f_i\}_i): (G, \{m_i\}_i) \rightarrow (G', \{m'_i\}_i)$ から可換図式

$$\begin{array}{ccc} C_*(\mathcal{J}_n) \otimes S_*(G)^{\otimes n} & \xrightarrow{f_n} & S_*(G') \\ \downarrow & & \parallel \\ S_*(\mathcal{J}_n) \otimes S_*(G)^{\otimes n} & & \\ \downarrow & & \\ S_*(\mathcal{J}_n \times G^{\times n}) & \xrightarrow{f_n} & S_*(G') \end{array}$$

によって A_∞ -代数の射 $(f, \{f_i\}_i): (S_*(G), \{m_i\}_i) \rightarrow (S_*(G'), \{m'_i\}_i)$ を得る。

5 A_∞ -構造のバー構成による記述（概要）

5.1 結合多面体を使った幾何学的バー構成

幾何学的バー構成の定義では単体を用いたが、結合多面体を用いても類似の構成が行える。その説明のために、まず A_∞ -空間の作用を定義する。

定義 5.1. 位相空間 X への A_∞ -空間 $(G, \{m_i\}_i)$ の右作用とは、連続写像の族 $\{\phi_i: \mathcal{K}_i \times X \times G^{\times i} \rightarrow X\}_{i \geq 1}$ であって、次を満たすものこと。

$$\phi_i(\partial_{k+1}(\rho, \sigma); x, g_1, \dots, g_i) = \begin{cases} \phi_{r-1}(\rho; \phi_{s-1}(\sigma; x, g_1, \dots, g_{s-1}), g_s, \dots, g_i) & k = 0 \\ \phi_{r-1}(\rho; x, g_1, \dots, g_{k-1}, m_s(\sigma; g_k, \dots, g_{k+s-1}), g_{k+s}, \dots, g_i) & k > 0 \end{cases}$$

ただし、 $\rho \in \mathcal{K}_r, \sigma \in \mathcal{K}_s$ で $r+s=i$ としている。左作用も同様に定義される。

すぐわかるように、 G 自身は自然に G の右及び左作用をもつ。

注意 5.2. 作用についてもやはり単位元を条件に入れることができるが、ここでは考えない。

注意 5.3. 結合多面体と *multiplihedron* の間には自然な写像 $\mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}$ が存在する。その対応の下で、 G の X への左作用を与えることは A_∞ -写像 $G \rightarrow \text{Map}(X, X)$ を与えることと同等になることが知られている。

定義 5.4. A_∞ -空間 $(G, \{m_i\}_i)$ と右作用, 左作用をもつ空間 $(X, \{\phi_i\}_i), (Y, \{\psi_i\}_i)$ を考える。(太い) バー構成 ((fat) bar construction) $B^K(X, G, Y)$ を次で定義する。

$$B^K(X, G, Y) = \left(\coprod_{i \geq 0} \mathcal{K}_{i+2} \times X \times G^{\times i} \times Y \right) / \sim$$

ただし, 同値関係は次で定める。

$$(\partial_{k+1}(\rho, \sigma); x, g_1, \dots, g_i, y) \sim \begin{cases} (\rho; \phi_{s-1}(\sigma; x, g_1, \dots, g_{s-1}), g_s, \dots, g_i, y) & k = 0 \\ (\rho; x, g_1, \dots, m_s(\sigma; g_k, \dots, g_{k+s-1}), \dots, g_i, y) & 0 < k < r \\ (\rho; x, g_1, \dots, g_{i-s+1}, \psi_{s-1}(\sigma; g_{i-s+2}, \dots, g_i, y)) & k = r \end{cases}$$

特に, $B^K G = B^K(*, G, *)$ と書く (G の分類空間)。

注意 5.5. 単体を用いた通常のバー構成の時のように, 退化作用素に関する同値関係も入れることができる。そのようにして定義したものが普通の意味でのバー構成と呼ばれるべきものである。単体を用いたバー構成に対しても, 退化作用素に関する同値関係を外すことで太いバー構成が定義できる。

詳細は略す ([IM89] を参照されたい) が, A_∞ -空間の作用に関する同変写像も定義することができる。複雑な構成になるが, このような同変写像はバー構成の間の写像を誘導することが知られている。特別な場合として, A_∞ -写像 $G \rightarrow G'$ が与えられたとき, 分類空間の間の写像 $B^K G \rightarrow B^K G'$ を誘導する。位相モノイドの時と同様に, A_∞ -空間 G が群状 ($\pi_0(G)$ が群となる) ならば, $\Omega^M B^K G$ との間に弱ホモトピー同値写像であるような A_∞ -写像が構成でき, 分類空間の間の写像と A_∞ -写像は up to homotopy で同等な情報を持っていることがわかる。

5.2 A_∞ -代数のバー構成と A_∞ -代数の射

前節で述べたように A_∞ -空間とバー構成 (分類空間) の間には up to homotopy での対応関係が知られているが, 代数の場合にはもっと良い対応関係が知られている。これまでの節では空間での構成の代数版を考える形のものが多かったが, この節の内容は空間での構成とは独立している。

A_* を次数付き加群とする。このとき, 次数 1 の元 s で生成される次数付き加群 Rs を用いて $sA_* = Rs \otimes A_*$ とおく。すると, 次のようになる。

$$(sA)_p = (Rs \otimes A_*)_p \cong A_{p-1}$$

そして, 次数付き加群 $\bar{T}sA_*$ (簡約テンソル余代数) を

$$\bar{T}sA_* = sA_* \oplus (sA_* \otimes sA_*) \oplus \dots$$

で定義する。 $\bar{T}sA_*$ には次の余積 (comultiplication) $\Delta: \bar{T}sA_* \rightarrow \bar{T}sA_* \otimes \bar{T}sA_*$ が存在する。

$$\Delta(sa_1 \otimes \dots \otimes sa_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (sa_1 \otimes \dots \otimes sa_k) \otimes (sa_{k+1} \otimes \dots \otimes sa_n)$$

degree (-1) の次数付き加群の準同型 $d: \bar{T}sA_* \rightarrow \bar{T}sA_*$ が **coderivation** とは, $d^2 = 0$ であって, 余積 Δ が次数付き微分加群の準同型となること, つまり

$$\Delta d = d \Delta$$

が成り立つこと. ただし, $\bar{T}sA_* \otimes \bar{T}sA_*$ には d から決まる次数付き微分加群のテンソル積としての微分を入れる. coderivation d が与えられているとき, 次数付き加群の準同型 $m_n: s^{n-2}(A_*^{\otimes n}) \rightarrow A_*$ ($n \geq 1$) を, $s^2 m_n$ が合成写像

$$s^n(A_*^{\otimes n}) = (Rs)^{\otimes n} \otimes A_*^{\otimes n} \cong (Rs \otimes A_*)^{\otimes n} = (sA_*)^{\otimes n} \xrightarrow{\text{包含写像}} \bar{T}sA_* \xrightarrow{d} s\bar{T}sA_* \xrightarrow{\text{射影}} s^2 A_*$$

と一致するように定義する. ただし, $d: \bar{T}sA_* \rightarrow s\bar{T}sA_*$ は次数 0 の準同型と思っている. このとき, 次が成り立つ.

命題 5.6. $\{m_i: s^{i-2}A_*^{\otimes i} \rightarrow A_*\}_{i \geq 2}$ は次数付き微分加群 (A_*, d) の A_∞ -形式. ただし, $d: A_* \rightarrow A_*$ は $A_* \rightarrow sA_*$ と思ったとき, sm_1 と一致するように定義する.

問題 5.1. この命題を τ_n と s^{n-2} と同一視した上で注意 4.12 の関係式を示すことで確認せよ.

逆に, 次数付き微分加群 A_* に A_∞ -形式 $\{m_i: s^{i-2}A_*^{\otimes i} \rightarrow A_*\}_{i \geq 2}$ が与えられているとき, 上で与えた対応を満たすような coderivation $d: \bar{T}sA_* \rightarrow \bar{T}sA_*$ が唯一つに定まる. つまり, A_∞ -形式は $\bar{T}sA_*$ の coderivation として定式化できる.

この定式化は A_∞ -代数の射の定式化においても有用である. 次数付き加群の準同型 $F: \bar{T}sA_* \rightarrow \bar{T}sA'_*$ が Δ, d と可換であるとき, F を次数付き微分余代数の準同型という.

命題 5.7. A_∞ -代数 A_*, A'_* に対し, その間の射 $(f, \{f_i\}_i)$ と次数付き微分余代数の準同型 $F: \bar{T}sA_* \rightarrow \bar{T}sA'_*$ は, 次の合成写像が sf_n となるような対応で一対一に対応する.

$$s^n(A_*^{\otimes n}) = (Rs)^{\otimes n} \otimes A_*^{\otimes n} \cong (Rs \otimes A_*)^{\otimes n} = (sA_*)^{\otimes n} \xrightarrow{\text{包含写像}} \bar{T}sA_* \xrightarrow{F} \bar{T}sA'_* \xrightarrow{\text{射影}} s^n A'_*$$

問題 5.2. この命題を符号を除いて証明せよ. つまり, τ'_n と s^{n-1} と同一視した上で注意 4.17 の関係式を符号の部分を除いて示すことで確認せよ.

6 扱うことができなかった内容

このノートの内容に近い話題で, 扱うことを諦めたものとして以下のものがある.

- 普遍主束
- A_n -写像と射影空間の関係
- A_∞ -代数の極小モデルと homotopy transfer theorem
- Massey 積が非自明な例

など.

参考文献

- [BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [IM89] Norio Iwase and Mamoru Mimura. Higher homotopy associativity. In *Algebraic topology (Arcata, CA, 1986)*, volume 1370 of *Lecture Notes in Math.*, pages 193–220. Springer, Berlin, 1989.
- [Kel01] Bernhard Keller. Introduction to A -infinity algebras and modules. *Homology Homotopy Appl.*, 3(1):1–35, 2001.
- [LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [May75] J. Peter May. Classifying spaces and fibrations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1(1, 155):xiii+98, 1975.
- [May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [Mil67] R. James Milgram. The bar construction and abelian H -spaces. *Illinois J. Math.*, 11:242–250, 1967.
- [Sta63] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H -spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292; *ibid.*, 108:293–312, 1963.