$4k$ 次元球面は複素多様体にはならない ————Chern 類と Pontryagin 類

蔦谷 充伸 tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/

よく知られているように，2 次元球面 S^2 は 1 次元の複素多様体になり，複素多様体としては **Riemann 球面**と呼ばれている．その構成は簡単で，$f(z)=\frac{1}{z}$ で定義される写像 $\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が複素解析的かつ全単射であって逆写像 $f^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ もまた複素解析的であるので，この写像によって 2 つの複素数平面 $\mathbb{C}$ を貼り合わせればよい．

では他の次元の球面はいつ複素多様体になるであろうか？複素 n 次元多様体は複素構造を忘れることにより $2n$ 次元の多様体となるので，複素多様体になり得るのは当然偶数次元球面 S^{2n} に限られる．

問 どのような n に対して S^{2n} が複素多様体となるのか？

例えば $n=2k$ の場合は Pontryagin 類と Chern 類の性質を使えば S^{4k} が複素多様体となり得ないことが証明できるので，まずこれらについて述べる．**Chern 類**とは位相空間 X 上の階数 r の複素ベクトル束 E に対して定義されるコホモロジー類

$$c_i(E)\in H^{2i}(X;\mathbb{Z})\quad (i=1,\dots,r)$$

のことである．なお，最も次数の高い Chern 類 $c_r(E)$ は複素構造を忘れて得られる向き付けられた実ベクトル束 $E_{\mathbb{R}}$ の Euler 類 $e(E_{\mathbb{R}})$ と一致することが知られている．また，自明束の Chern 類は自明（$i=1,\dots,r$ に対し $c_i(E)=0$）となることも知られている．一方，X 上の実ベクトル束 F の **Pontryagin 類**は F の複素化 $F\otimes\mathbb{C}$ の Chern 類を用いて

$$p_i(F)=(-1)^i c_{2i}(F\otimes\mathbb{C})\in H^{4i}(X;\mathbb{Z})$$

として定義される．これらは係数拡大により $\mathbb{Q}$ 係数のコホモロジー類とみなすこともできるので，以下そのようにする．Pontryagin 類や Chern 類には次の和公式が成立する．

$$c_i(E\oplus E')=\sum_{j=0}^{i}c_j(E)c_{i-j}(E'),\quad p_i(F\oplus F')=\sum_{j=0}^{i}p_j(F)p_{i-j}(F')$$

ここで $c_0(E)=c_0(E')=p_0(F)=p_0(F')=1$ とする．なお，$\mathbb{Q}$ 係数でないと Pontryagin 類の和公式の両辺は 2 倍で消されるねじれ元の分だけずれる．

さて，S^{4k} の接束 TS^{4k} が複素ベクトル束であったと仮定しよう（このとき S^{4k} は**概複素多様体**であるというが，複素多様体は概複素多様体である）．TS^{4k} は階数 1 の自明束を直和すると自明束になる（$S^{4k}\subset\mathbb{R}^{4k+1}$ 上の各点で S^{4k} と直交する直線を取っていると思えば，それと接平面の直和は $\mathbb{R}^{4k+1}$ と自然に同一視される）ので，和公式から Pontryagin 類は自明であることがわかる．特に $p_k(TS^{4k})=0$．一般に複素ベクトル空間 V に対し，その複素構造を忘れた実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ と複素共役 $\bar{V}$ に対し自然な同型

$$V_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}\cong V\oplus\bar{V}$$

が成り立つので，ベクトル束についても同様の同型が成り立つ．このことを用いると，いま $TS^{4k}\cong E_{\mathbb{R}}$ となる複素ベクトル束 E が存在するので，

$$p_k(TS^{4k})=c_{2k}(E_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C})=c_{2k}(E\oplus\bar{E})=c_{2k}(E)+c_{2k}(\bar{E})=2e(E_{\mathbb{R}})=2e(TS^{4k})$$

ここで階数が偶数である複素ベクトル束は共役を取っても実ベクトル束として向きが変わらない（ので Euler 類も変わらない）ことを用いた．いま S^{4k} の Euler 数は 2 なので，Gauss–Bonnet の定理から，$p_k(TS^{4k})=2e(TS^{4k})$ を S^{4k} 上で積分すると 4 となる．これは $p_k(TS^{4k})=0$ に反する．ゆえに，TS^{4k} は複素ベクトル束の構造を持ちえない．

さて，S^{4k+2} の場合はどうであろうか？実はこの場合も $k=0,1$ の場合を除いて接束は複素ベクトル束の構造を持たないことが知られている．証明は **Bott の周期性定理** を用いて，複素ベクトル束の Euler 類として実現されるコホモロジー類の範囲を特定することによってなされる．

S^2 の場合はもちろん Riemann 球面があるので複素多様体となり，残るのは S^6 だけである．実は S^6 は概複素構造を持つ（接束が複素ベクトル束の構造を持つ）ことが知られている．しかし，これを書いた時点（2023 年 5 月）で未だに S^6 が複素多様体の構造を持つかどうかについて，正しいと広く認められた証明は無いようである．複素ベクトル束となるかどうかは比較的トポロジー的な問題であるが，複素多様体となるかどうかはある種の可積分性を問う，より解析的な問題であり，全く異なるアプローチが必要と思われる．