

高校数学で学ぶように, 実数の全体 \mathbb{R} や複素数の全体 \mathbb{C} には和と積が定義され, それらは結合法則, 交換法則, 分配法則を満たし, 0 や 1, マイナス元, 0 以外の逆元を持つ. 少し数学に詳しい人ならば **四元数** というものも知っているかもしれない. 四元数の全体は \mathbb{H} と書く (発見者である Hamilton の名前からそのように書きたい). \mathbb{H} は \mathbb{R} 上のベクトル空間としては 4 次元で, 基底は

$$1, i, j, k$$

で与えられる. \mathbb{H} には和と積が定義され,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

を満たし, 0 でない各元は積の逆元を持つ. 特に, 任意の $a, b, c \in \mathbb{H}$ に対し次を満たす.

- (1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (2) $a + b = b + a$ (3) $a + 0 = a$
(4) $a + (-a) = 0$ (5) $a(bc) = (ab)c$ (6) $1a = a1 = a$
(7) $a(b + c) = ab + ac$ (8) $(a + b)c = ac + bc$ (9) $aa' = a'a = 1$ となる $a' \in \mathbb{H}$ が存在する

ここには積の交換法則 $ab = ba$ が書かれていないが, 四元数に対して交換法則は実際に成り立たない. たとえば $ij = -ji$ となる. 実数を複素数に拡張した際に様々な恩恵があったように, このような代数構造が存在することがわかれば, 様々な場面で活用できることは期待できる. となれば, 次のような疑問が自然に思い浮かぶ.

問 割り算ができる \mathbb{R} 上の分配多元環はどのぐらいあるのか?

\mathbb{R} 上の **分配多元環** とは, 和については \mathbb{R} 上のベクトル空間となることを仮定し, 積については 1 が存在することのみを仮定し, 和と積の関係については分配法則 (7), (8) を仮定したものである. ここで積の交換法則と結合法則は要請していない. また「割り算ができる」とは, 上の条件 (9) が成り立つことを意味する. なお, 割り算ができることも諦めてしまうと行列環のようなものがあり, 何か他の条件を課さない限りたくさんの取り方があり得る. 他の条件についても, 外すと自由度が大きくなりすぎてしまうように思われる. この問題はそれなりに長い歴史のある問題だったようである. 答えとしては次のようになることが知られている.

定理 問のような分配多元環は実数体 \mathbb{R} , 複素数体 \mathbb{C} , 四元数体 \mathbb{H} , 八元数体 \mathbb{O} のいずれかと同型なものに限る.

八元数体 \mathbb{O} とは, 詳しく説明しないが, ある 8 次元の分配多元環である. 交換法則と結合法則を満たさないことが知られている. つまりこの定理は, 積の結合法則と交換法則を満たすものは \mathbb{R}, \mathbb{C} のみであること, 積の結合法則を満たすものは $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のみであることも主張している. 例えば 3 次元のこういった分配多元環は存在しない.

この問題は一見純粋な代数学の問題に見えるが, 次の補題によってトポロジー的な性質があることがわかる.

補題 A が問のような分配多元環であって $\dim A = n$ のとき, $n - 1$ 次元球面 S^{n-1} は平行化可能である.

一般に多様体が **平行化可能** とは, その接束がベクトル束として自明になることである. 今の場合, n 次直交行列で行列式が 1 であるものの全体 (n 次特殊直交群) $\mathrm{SO}(n)$ から第 1 行を取り出す写像 $p: \mathrm{SO}(n) \rightarrow S^{n-1}$ に対し, $p \circ s = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ となる連続写像 $s: S^{n-1} \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ が存在することと同値である. また, このような写像 s を変換関数として用いることにより, S^n 上の階数 n のベクトル束 $E \rightarrow S^n$ であって, 「その Euler 類が $H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元となる」ものが作れる. つまり, 分配多元環の存在問題がベクトル束の特性類の問題に置き換わったのである.

まず n が 3 以上の奇数の場合を考える ($n = 1$ のときは \mathbb{R} が条件を満たす分配多元環なので考えなくてよい). このとき S^{n-1} の Euler 数は $\chi(S^{n-1}) = 2$ なので, Poincaré-Hopf の定理から接ベクトル場は必ず零点を持ち, S^{n-1} の接束は自明にはなり得ない. したがって n は偶数でなければならない.

n が偶数のとき、 S^n 上の階数 n のベクトル束 $E \rightarrow S^n$ であって、「その Euler 類が $H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元となる」ものが存在するか？という問題は **Bott の周期性定理** と呼ばれる有名な定理を用いて解かれている。結論としては $n = 2, 4, 8$ でなければならないことが知られている。このことから、割り算ができる分配多元環 A が存在するのは $\dim A = 1, 2, 4, 8$ のときに限ることがわかる。この議論で分かることは存在の必要条件だけで、実際に存在することを示すためには $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ を具体的に与えなければならないし、これらと同型なものしか存在しないことを言うためにはさらに議論が必要である。

以上では割り算ができる分配多元環が存在するための次元の必要条件がトポロジーのアイデアによって与えられることを見た。特に最も本質的な結果は Bott の周期性定理である。Bott の周期性定理はユニタリ行列のなす空間 (**ユニタリ群**) $U(n)$ のホモトピー群のうち「安定ホモトピー群」と呼ばれる部分を記述する定理である。Bott によるオリジナルの証明は **Morse 理論** と呼ばれる多様体の形を解析する手法を巧妙に用いるものであった。その後、ホモロジーを用いたより代数トポロジー的な証明が Dyer–Lashof により与えられている。代数トポロジーでは平行化可能な球面を求める問題は、球面間の写像の **Hopf 不変量** に関する問題としてもとらえられている。