直線と平面は同相ではない
————次元の位相不変性とホモロジー群

蔦谷 充伸 tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/

線型代数学では同型なベクトル空間は次元が等しいということを学ぶ．これは線型同型写像が基底を保つためであった．これを拡張して「微分同相写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき $m=n$ か？」という問題を考える．なお，**微分同相写像**とは f が C^∞ かつ全単射であって，逆写像 $f^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ もまた C^∞ 級となることである（念のため言っておくと，線型同型写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は微分同相写像である）．この問の答えも yes である．なぜなら，f と f^{-1} の Jacobi 行列を考えると，$f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$，$f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ より

$$(Jf^{-1})_{f(x)}(Jf)_x = I_m, \quad (Jf)_x(Jf^{-1})_{f(x)} = I_n$$

となる（I_m は m 次単位行列）ので $(Jf)_x$ は正則行列でなければならず，したがって $m=n$ となる．微分可能写像が線型写像で近似できるため，線型写像の場合に帰着される，ということがこの証明の本質である．

では，微分可能性すらも捨てて，次の問題を考えるとどうであろうか．

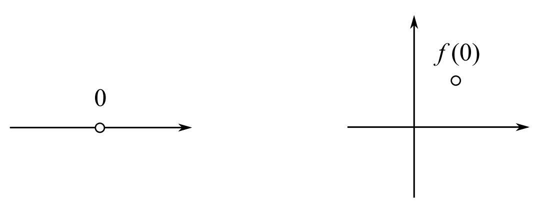
問 同相写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき $m=n$ か？

微分可能性が仮定されていないと線型写像による近似が使えないため，微分同相のときに比べるとはるかに難しくなることが予想される．例えばまず $m=1$ のときを考える．もし $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が同相であるならば全射でなければならず，連続曲線によって n 次元空間をうめつくすことなどそもそも出来るのだろうか，と思うかもしれない．そのような全射が存在しないと示すことが出来れば，一般の場合も証明の方針が立つかもしれない．だが残念ながらその方針での証明は不可能である．次が知られている．

定理（Peano, 1890） 全射連続写像 $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ が存在する．

このような 2 次元以上の空間を埋め尽くす連続曲線のことを**空間充填曲線**という．これは微分可能性を捨てているからできることであって，C^∞ 級曲線ではできない（cf. Sard の定理）．空間充填曲線の話にはこれ以上立ち入らないことにするが，いずれにせよ，別の方針を考えないといけない．

実は $m=1$ の場合は次のようにして初等的に証明できる．$n>1$ のとき同相写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が存在したとする．このとき，$0\in\mathbb{R}$ と $f(0)\in\mathbb{R}^n$ を除いた集合へ f を制限して得られる写像 $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}$ もまた同相写像である．しかし，$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は弧状連結でないが，$\mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}$ は弧状連結である．



弧状連結な位相空間に同相な位相空間は弧状連結でなければならないので，矛盾．ゆえに，同相写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が存在するならば，$n=1$ でなければならない．

この証明では 1 点の補集合の（弧状）連結性を見ることで証明が出来たが，$m > 1$ のときは同じ証明は使えない．実はホモロジー群を使えばこの方法はそのまま一般化できる．まず，位相空間 X と整数 i に対し **i 次ホモロジー群** $H_i(X)$ というアーベル群が定まる．さらに，連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し**誘導準同型**

$$f_*\colon H_i(X) \to H_i(Y)$$

が定まり，$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_i(X)}$ と $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$（$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$）をみたす．また，$n\geq 2$ のとき $H_{n-1}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\cong\mathbb{Z}$ であって，$i\neq 0, n-1$ のとき $H_i(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=0$ となることが知られている（これは $n-1$ 次元球面のホモロジー群の計算結果と，$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ が $n-1$ 次元球面とホモトピー同値であることから従う）．

では，実際に証明してみよう．$m, n > 1$ とし，同相写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在したとする．平行移動は同相写像なので，$f(0) = 0$ と仮定してもよい．すると，f と f^{-1} の制限として同相写像 $F\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と逆写像 $F^{-1}\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ を得る．すると，$m-1$ 次ホモロジー群への誘導準同型

$$F_*\colon H_{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \to H_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \qquad (F^{-1})_*\colon H_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}),$$

は互いに逆写像であり，従って同型写像である．これより $H_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ でなければならない．ゆえに $m = n$ となる．

以上ではホモロジー群を用いて Euclid 空間の次元の位相不変性を示した．次元の位相不変性の証明には **Lebesgue の被覆次元** を用いるものもあり，興味があれば調べられたい．実はもう少し強く次が言える：開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と開集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ が同相であるとき $m = n$ となる．このことを示すには，上の証明が本質的には取り除いた点のごく近傍の様子だけが問題になることをうまく使う必要がある．これをうまく実行するために 局所ホモロジー群 という道具が使われる．