なぜ複素数係数多項式は複素数の範囲で根を持つのか ————代数学の基本定理と回転数

蔦谷 充伸 tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/

次は有名な代数学の基本定理である．

代数学の基本定理 n を正の整数とし，$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$（ただし $a_n \neq 0$）とする．このとき，多項式 $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ に対し $f(z_0) = 0$ となる点 $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在する．

この定理の証明はいくつかあるが，ここでは回転数に着目した証明を紹介する．学部生向けの複素関数論の講義では Rouché の定理の応用として扱うものとほぼ同等だが，よりトポロジーらしい説明を与える．

$a_n \neq 0$ であるような $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ に対し，多項式 $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ を考えよう．代数学の基本定理を背理法で証明したいので，$f(z_0) = 0$ となる $z_0 \in \mathbb{C}$ は存在しないと仮定する．簡単な不等式評価の議論から十分大きな $R > 0$ をとれば

$$|a_n| R^n > |a_{n-1}| R^{n-1} + \cdots + |a_1| R + |a_0| \tag{$*$}$$

となることがわかる．ここで $0 \leq t \leq 1$ に対し

$$f_t(z) = a_n z^n + t(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$$

と定義する．すると z が複素数平面 $\mathbb{C}$ において原点を中心とする半径 R の円を動くとき，つまり $z = Re^{i\theta}$ と書けるとき，不等式 $(*)$ から

$$\begin{aligned} |f_t(Re^{i\theta})| &= |a_n R e^{in\theta} + t(a_{n-1} R e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_1 R e^{i\theta} + a_0)| \\ &\geq |a_n| R^n - t(|a_{n-1}| R^{n-1} + \cdots + |a_1| R + |a_0|) > 0 \end{aligned}$$

となることがわかる．したがって任意の $\theta \in \mathbb{R}$ と $0 \leq t \leq 1$ に対し，$f_t(Re^{i\theta}) \neq 0$ となることがわかった．

ここで複素数平面上の円周

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

に対し，次のような合成写像 $F_t \colon S^1 \to S^1$ を考える．

$$S^1 \xrightarrow{z \mapsto f_t(Rz)} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{絶対値で割る}} S^1$$

すると連続写像の族 $\{F_t\}_t$ は写像 F_0 と F_1 の間のホモトピーを与える．一般に，連続写像の族 $\{G_t \colon X \to Y\}_{t \in [0,1]}$ が G_0 と G_1 の間の**ホモトピー**であるとは，$G(t, x) = G_t(x)$ で定まる写像 $G \colon [0,1] \times X \to Y$ が連続であることである．二つの連続写像の間にホモトピーが存在するとき，それらは**ホモトピック**であるという．

ここでひとつ不変量を導入する．円周の間の連続写像 $f \colon S^1 \to S^1$ の**回転数** $d(f)$ とは，文字通り定義域で $x \in S^1$ が正の向きに一周する間に $f(z) \in S^1$ が S^1 を何周するかを表した数である．より数学的には

$$f(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\phi(\theta)}$$

となる連続関数 $\phi \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ をとったとき（$2\pi\phi(\theta)$ は 0 から θ まで動く間に $f(e^{2\pi i\theta})$ がどれだけ回転したかを一般角で表したものである），$d(f) = \phi(1) - \phi(0)$ と定義される．実はホモトピックな写像の回転数は等しいことが知られている．したがって，今の我々が考えている F_0, F_1 に対しても $d(F_1) = d(F_0)$ が成り立つのである．$F_0(z) = a_n z^n$ については z が 0 の周りを一周する間に $a_n z^n$ は 0 の周りを n 周するので，$d(F_0) = n$ である．つまり $d(F_1) = n$ となる．

ここで F_1 について詳しく考えてみよう．いま f は $f(z_0)=0$ となる $z_0 \in \mathbb{C}$ を持たないと言っているので，f の像は 0 を含まない．このことから，F_1 は次の合成写像と思える．

$$S^1 \xrightarrow{\text{包含写像}} \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto f(Rz)} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{絶対値で割る}} S^1$$

ここで大事なのは F_1 を合成写像として書くとき，$\mathbb{C}$ という空間を経由しているということである．包含写像 $S^1 \to \mathbb{C}$ はホモトピー $(t,z) \mapsto tz$ により，0 への定値写像とホモトピックである．「ホモトピック」という関係が写像の合成で保たれることに注意すると，F_1 は定値写像にホモトピックということが従う．ここで回転数の定義を思い出すと，定値写像の回転数は当然 0 である（全く回転しない）．したがって $d(F_1)=0$ とならねばならない．これは上で見た $d(F_1)=n$ と矛盾する．この矛盾の原因は $f(z_0)=0$ となる $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在しないと仮定したことである．したがって代数学の基本定理が証明されたことになる．

以上では回転数のホモトピー不変性を認めて代数学の基本定理を証明した．トポロジー的な本質は，n 次多項式は十分半径の大きい円に沿って原点の周りを n 回転する写像となっている，ということである．このような回転する回数はトポロジーでは重要な考え方であり，多様体の間の写像の 写像度 に一般化される．写像度を記述するためには（コ）ホモロジーが用いられ，様々な応用を持つ．また， ホモトピー不変性 も重要な性質である．代数トポロジーはホモトピー不変な性質を扱うのが得意な分野であり，ホモトピー不変な様々な不変量（ ホモトピー不変量 ）が知られている．