幾何学II 講義ノート

蔦谷 充伸[*]

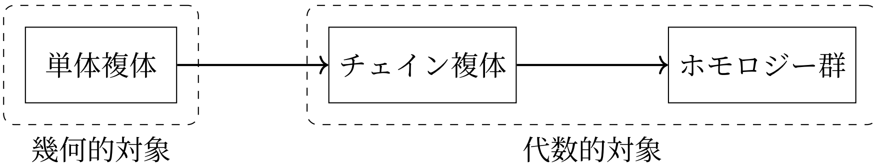
January 18, 2026

Contents

[*]九州大学大学院数理学研究科 tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp

0　この講義の目標

- 目標：**単体複体** の **ホモロジー群** を理解する．



  - 単体複体とは，「単体（点，線分，三角形，四面体，⋯）を組み合わせて作られる図形」のこと（もちろんこれは正確な定義ではない）．
  - ホモロジー群は， **チェイン複体** に対して定まるアーベル群である．
  - 単体複体という幾何的対象に対しチェイン複体が定まり，そのチェイン複体からホモロジー群が定まる．
  - 単体複体のホモロジー群は，多様体の幾何学をはじめとして現代幾何学の研究には欠かせない道具である．

- 教科書の例（一冊は持っておき，講義内容との対応を確認するとよい）
  - 田村一郎，トポロジー，岩波書店，1972
  - 加藤十吉，位相幾何学，裳華房，1988
  - 坪井俊，幾何学 II ホモロジー入門，東京大学出版会，2016

- 講義の構成について
  - 単体複体を先に学んでどういう対象を扱うかを先に知っておくほうが，動機のある健全な数学の学習の順序かもしれない．しかし，「幾何学 II」の講義では演習の時間を設けている都合上，代数的基礎を早い段階で身につけ，時間をかけてその計算に慣れ親しんでいく方が，計算を実行する能力を養うためにはよいと判断した．

- 理解のために
  - 演習問題に取り組むなどして，定義された概念の理解を深める努力をお願いします．定義を一つ一つ確実に理解しながら進めるのがコツです．抽象的でわかりにくいことは例をたくさん考えることで少しずつ分かってくることがあり，分からないことに粘り強く向き合わないといけないことがあります．
  - 加群の取り扱いはあまり説明しないので，「代数学 II」の受講をお勧めします．

1　アーベル群の復習

Def. 1.1. $(M,+)$ が **アーベル群** (abelian group (ab. gp.)) とは,
M: set, $+$: $M \times M \to M$: map で次を満たすもの.

(1) $\forall x,y,z \in M, x+(y+z)=(x+y)+z$,

(2) $\exists z \in M, \forall z \in M, x+z=z+x=x$（$\mathbf{0}=z$ と書き，**（M の）ゼロ元** という）,

(3) $\forall x \in M, \exists x' \in M$, s.t. $x+x'=x'+x=0$（$\boldsymbol{-x}=x'$ と書き，**$\boldsymbol{x}$ のマイナス元** という）,

(4) $\forall x,y \in M, x+y=y+x$.

今後，演算 $+$ は明示せずに単に「M は ab. gp.」などと言う.

Ex. 1.2.

- ゼロ元のみからなる ab. gp. 0.
- 整数の全体 $\mathbb{Z}$ は通常の和 $+$ で ab. gp. となる.
  ゼロ元は 0 であり，$x \in \mathbb{Z}$ のマイナス元は符号を変えて得られる $-x$ である.
- r 個（r は 0 以上の整数）の整数の組の全体
  $$\mathbb{Z}^r=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_r\end{pmatrix}\middle|\ \forall i, a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$
  は成分ごとの和を演算として ab. gp. となる.
  ゼロ元はすべての成分が 0 となる組であり，マイナス元は各成分の符号を変えて得られるもの.
- $n \geq 3$ のとき n 次対称群 S_n は条件 (4) をみたさないので，ab. gp. ではない.

- 記号：M: ab. gp. のとき，$x,y \in M$ と正の整数 n に対し
  - $nx := \underbrace{x+\cdots+x}_{n\text{ 個}}$
  - $0x := 0$
  - $-nx := -(nx) = n(-x)$
  - $x-y := x+(-y)$

  と表す（これにより ab. gp. は自然に $\mathbb{Z}$-加群となる).

Def. 1.3. X: set のとき，各 $x,y \in X$ に対し $x \sim y$ かそうでないかが決まっているとき，$\sim$ を X 上の **関係** (relation) という.
さらに $\sim$ が **同値関係** (equivalence relation) とは次をみたすこと.

(1) $\forall x,y \in X, (x=y \Rightarrow x \sim y)$,

(2) $\forall x,y \in X, (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X, (x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z)$.

$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ を **x が代表する同値類** (equivalence class represented by x) という（$\bar{x}$ など別の記号を使うこともある）.
$X/\!\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による **商集合** (quotient set) という.
また，$p(x) = [x]$ で定まる写像 $p\colon X \to X/\!\sim$ を **射影** (projection) という.

（商集合からの写像を代表元を使って定義する際には well-definedness を確認しないといけない，などの基本事項の説明はここでは既知のものとして省略する）

Def. 1.4. M: ab. gp., $L \subset M$: subset のとき，
L が M の **部分群** (subgroup (subgp.)) とは，次をみたすこと.

(1) $L \neq \emptyset$,

(2) $\forall x, y \in L, x + y, -x \in L$.

Rem. 1.5. (2) の仮定の下で (1) は $0 \in L$ と同値.

Def. 1.6. M: ab. gp., $L \subset M$: subgp. のとき，$x, y \in M$ に対し **$x \equiv y \bmod L$** を $x - y \in L$ が成り立つこととすると，これは同値関係になる.
この同値関係による商集合 $M/L = M/(\equiv \mod L)$ を M の L による **商群** (quotient group) または **剰余群** という.
実際，M/L は $[x] + [y] = [x + y]$ で定まる演算により，ab. gp. となる.

$[x] + [y] = [x + y]$ の well-definedness：
$x \equiv x' \mod L$, $y \equiv y' \mod L$ とする.
このとき $x - x', y - y' \in L$ なので，

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in L$$

となる．よって $[x + y] = [x' + y']$ となり，well-defined.

Rem. 1.7. ab. gp. の subgp. は常に normal.

Ex. 1.8. $m \in \mathbb{Z}$ のとき $m\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n = mk\}$ は $\mathbb{Z}$ の subgp.
$m > 0$ のとき，

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \ldots, \overline{m-1}\} \quad : \text{位数 } m \text{ の巡回群}$$

Def. 1.9. M, N: ab.gp. のとき，$f\colon M \to N$ が **準同型写像** (homomorphism (hom.)) とは，次をみたすこと.

$$\forall x, y \in M, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

hom. f が全単射のとき，f は **同型写像** (isomorphism (isom.)) という．
isom. $f\colon M \to N$ が存在するとき，M と N は **同型** (isomorphic) といい，$M \cong N$ と書く．

Rem. 1.10. 準同型 f について $f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$ が成り立つ．

Ex. 1.11.
- M: ab. gp., $L \subset M$: subgp. のとき
  包含写像 $i\colon L \to M$，射影 $p\colon M \to M/L$ は hom.
- M, N: ab. gp., $L \subset M$: subgp., $f\colon M \to N$: hom. のとき，
  $\forall x \in L, f(x) = 0$ ならば，$\bar{f}\colon M/L \to N$ が定まり，hom. になる．
  また，$\bar{f} \circ p = f$ が成り立つ．このことを次の図式は **可換** (commutative) であるという．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ M/L \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- M, N: ab. gp., $f\colon M \to N$: hom. のとき，

$$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\} \qquad f \text{ の } \textbf{核} \text{ (kernel)}$$
$$\operatorname{im} f = \{y \in N \mid \exists x \in M \text{ s.t. } y = f(x)\} \qquad f \text{ の } \textbf{像} \text{ (image)}$$

は subgp.

Thm. 1.12 (準同型定理)**.** M, N: ab. gp., $f\colon M \to N$: hom. のとき，
f が全射ならば，$\bar{f}\colon M/\ker f \to N$ は isom.

2　チェイン複体とホモロジー群

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{単体複体}} \arrow[r] & \boxed{\text{チェイン複体}} \arrow[r] & \boxed{\text{ホモロジー群}} \end{tikzcd}$$

幾何的対象　　　　代数的対象（この節ではこちらを扱う！）

Def. 2.1. ab. gp. の列 $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を **次数付アーベル群** (graded abelian group (gdd. ab. gp.)) という.

Def. 2.2. $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}, C' = (C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$: gdd. ab. gp. のとき,
hom. の列 $f = (f_n\colon C_n \to C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を **次数付準同型** (gdd. hom.) といい, $f\colon C \to C'$ と書く.
各 f_n が isom. のとき, gdd. hom. $f = (f_n)_n\colon C \to C'$ は **次数付同型** (gdd. isom.) といい,
gdd. ab. gp. C, C' の間に gdd. isom. が存在するとき, C と C' は **（次数付加群として）同型** (isomorphic) であるという.

- $f = (f_n)_n\colon C \to C', f' = (f'_n)_n\colon C' \to C''$: gdd. hom. のとき,
  合成 (composition) $f' \circ f = (f'_n \circ f_n)_n\colon C \to C''$ が定まる（gdd. hom. になる）.

Def. 2.3. $C = (C_n)_n$: gdd. ab. gp. に対し,
hom. の列 $\partial_n\colon C_n \to C_{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ が与えられていて,
各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ が成り立つとする.
このとき, $C = (C, \partial) = ((C_n)_n, (\partial_n)_n)$ を **チェイン複体** (chain complex (ch.cpx.)) という.

Def. 2.4. $C = ((C_n)_n, (\partial_n)_n), C' = (C', (\partial'_n)_n)$: ch cpx. のとき,
$f = (f_n)_n\colon C \to C'$: gdd. hom. が **チェイン写像** (chain map (ch. map)) とは,
各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial'_n \circ f_n = f'_{n-1} \circ \partial_n$ となること.
$f\colon C \to C'$: ch map., gdd. isom. が存在するとき, C と C' は **（チェイン複体として）同型** (isomorphic) という.

- 条件 $\partial'_n \circ f_n = f'_{n-1} \circ \partial_n$ は「次の図式が可換」ということ.

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & C'_n \arrow[d, "\partial'_n"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Def. 2.5. $C = ((C_n)_n, (\partial_n)_n)$: ch. cpx. に対し

$$Z_n(C) = \ker \partial_n = \{z \in C_n \mid \partial_n z = 0\}$$
$$B_n(C) = \operatorname{im} \partial_{n+1} = \{b \in C_n \mid \exists c \in C_{n+1} \text{ s.t. } b = \partial_{n+1} c\}$$

と定める. C_n の元を n 次の **チェイン** (chain), $Z_n(C)$ の元を n 次の **サイクル** (cycle), $B_n(C)$ の元を n 次の **バウンダリー** (boundary) という.

- $B_n(C) \subset Z_n(C)$ となる．

> ***Proof.*** $b \in B_n(C)$ とすると $b = \partial_{n+1}c$ となる $c \in C_{n+1}$ が存在するので $\partial_n b = \partial_n(\partial_{n+1}c) = 0$ となり，$b \in Z_n(C)$ である． □

> **Def. 2.6.** C: ch. cpx. のとき，
> $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ を C の **n 次ホモロジー群** (n-th homology group) といい，$H_n(C)$ の元を C の **n 次ホモロジー類** (n-th homology class) という．

- $H_n(C)$ の任意の元は $[z]$ $(z \in Z_n(C))$ と書ける．

- $f\colon C \to C'$: ch. map between ch. cpxes. のとき，$f(Z_n(C)) \subset Z_n(C'), f(B_n(C)) \subset B_n(C')$.

> ***Proof.*** $z \in Z_n(C)$ とすると $\partial'_n(f_n(z)) = f_{n-1}(\partial_n z) = 0$ なので $f_n(z) \in Z_n(C')$ となり，$f(Z_n(C)) \subset Z_n(C')$.
> $b \in B_n(C)$ とすると $b = \partial_{n+1}c$ となる $c \in C_{n+1}$ が存在するので，$f_n(b) = f_n(\partial_{n+1}c) = \partial'_{n+1}f_{n+1}(c)$ となり，$f(B_n(C)) \subset B_n(C')$. □

- これより $f_*[z] = [f_n(z)]$ で準同型写像 $f_*\colon Z_n(C)/B_n(C) \to Z_n(C')/B_n(C')$ が定まる．

> ***Proof.*** まず，$z \in Z_n(C)$ に対し $f_n(z) \in Z_n(C')$ なので，$[f_n(z)] \in H_n(C')$ が定まる．次に $z, z' \in Z_n(C)$ に対し $[z] = [z']$ とすると，$z - z' \in B_n(C)$ なので，$f_n(z - z') \in B_n(C')$ となり，$f_n(z - z') = f_n(z) - f_n(z')$ なので，$[f_n(z)] = [f_n(z')]$ が成り立つ． □

- 以下では混乱の恐れがないときは $f = f_n, \partial = \partial_n$ など，添え字を略することがある．

> **Def. 2.7.** $f\colon C \to C'$: ch. map between ch. cpxes. のとき，$f_*[z] = [f(z)]$ で定まる準同型
> $$f_*\colon H_n(C) \to H_n(C')$$
> を **f の誘導準同型** (homomorphism induced from f) という．

> **Ex. 2.8.** C: ch. cpx. を次で定める．
> $$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \| & & \| & & \| & & & & & & \\ & & & & & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\text{倍}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & & & & & & \end{array}$$
> $Z_0(C) = C_0 = \mathbb{Z}, B_0(C) = 0$ より $H_0(C) \cong \mathbb{Z}$.
> $Z_1(C) = C_1 = \mathbb{Z}, B_1(C) = 2\mathbb{Z}$ より $H_1(C) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
> $Z_2(C) = 0$ より $H_2(C) = 0$.
> $n \neq 0, 1, 2$ のとき $Z_n(C) \subset C_n = 0$ より $H_n(C) = 0$.

ホモロジー群の計算に役立つ事実をまとめておく．

Def. 2.9. M: ab. gp., $x_1, \ldots, x_r \in M$ のとき,
$x_1, \ldots, x_r$ が M を **生成する** (generate) とは, 任意の $y \in M$ に対し, $y = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r$ となる $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ が存在すること. このとき $x_1, \ldots, x_r$ は M の **生成系** (generators) という.
M に有限個の元からなる生成系が存在するとき, M は **有限生成** (finitely generated (fin. gen.)) という. 特に, 一つの元から生成されるアーベル群を **巡回群** (cyclic group) という.

- 巡回群は $\mathbb{Z}$ または適当な 2 以上の整数 m に対し $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と同型になる.

Def. 2.10. M, N: ab. gp. のとき, M と N の **直和** (direct sum) $M \oplus N$ とは, 直積 $M \times N$ に演算

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$$

で定まる演算を与えたもの.

Thm. 2.11 (有限生成アーベル群の基本定理)**.** M: fin. gen. ab. gp. のとき, M は有限個の巡回群の直和と同型になる.
つまり次のような形の ab. gp. と同型になる ($r, s \geq 0, m_i \geq 2$).

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$$

- 各次数が fin. gen. ab. gp. である ch. cpx. の各次数のホモロジー群は fin. gen.

Def. 2.12. M: ab. gp., $x_1, \ldots, x_r \in M$ のとき,
$x_1, \ldots, x_r$ が **線型独立** (linearly independent) とは $a_1x_1 + \cdots + a_rx_r = 0$ となる $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ は $a_1 = \cdots = a_r = 0$ のときに限ること.
M の線型独立な生成系を M の **基底** (basis) という.
M の基底が存在するとき, M は **自由** (free) であるという.

- M の r 個の元からなる基底が存在するとき, M は $\mathbb{Z}^r$ と同型である.

- free ab. gp. の任意の subgp. は free である.

3 単体複体

- Euclid 空間内の幾何的単体複体でイメージをつかんでから（抽象）単体複体を定義する．
- 本講義では主に（抽象）単体複体を扱う．

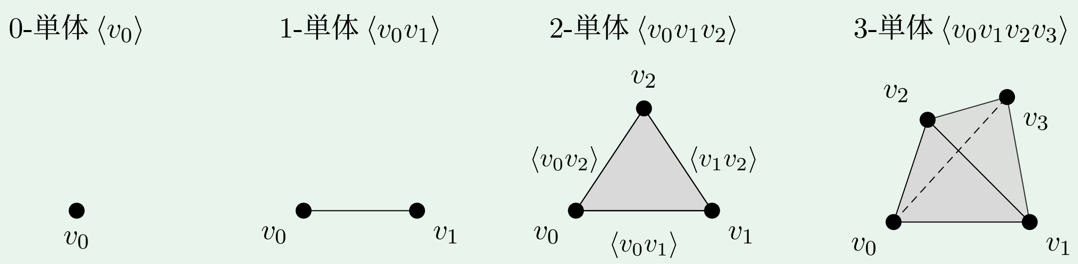
Def. 3.1. $v_0, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^N$ $(k \geq 1)$ が**一般の位置にある**とは，
$v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ が $\mathbb{R}^N$ のベクトルとして線型独立であること．
$k = 0$ のとき，$v_0 \in \mathbb{R}^N$ は（無条件に）一般に位置にあるということにする．

Def. 3.2. $v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^N$ が一般の位置にあるとき，

$$\langle v_0 \cdots v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \,\middle|\, \forall i, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

を $v_0, \ldots, v_k$ を頂点とする**幾何的 k-単体** (geometric k-simplex) という．
また，部分列 $v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}$ も一般の位置にあることが確認でき，$\langle v_{i_0} \cdots v_{i_\ell} \rangle$ を $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ の ℓ-次元の**面** (face) という．

Ex. 3.3.



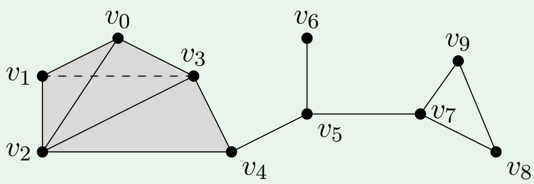
- たとえば v_0, v_1, v_2 が一般の位置にないとき，$\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ は線分や一点に「つぶれる」．

Def. 3.4. K: $\mathbb{R}^N$ 内の幾何的単体のなす有限集合とする．
次が成り立つとき，K は $\mathbb{R}^N$ 内の**幾何的（有限）単体複体** (geometric (finite) simplicial complex) という．

(1) $\sigma \in K$ のとき σ の面 τ に対し $\tau \in K$,

(2) $\sigma, \tau \in K$ のとき $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば，$\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面．

Ex. 3.5. 次の図のような図形は $\mathbb{R}^3$ 内の幾何的単体複体を与える．



- 幾何的単体複体のトポロジーを考えるとき，$\mathbb{R}^N$ の点としての座標は重要ではなく，各面同士の交わり方さえわかればよい．そこで次のように「抽象化」する．

Def. 3.6. $\tilde{V}$: 有限集合, K: $\tilde{V}$ の部分集合からなる集合のとき，
K が **（抽象有限）単体複体** ((abstract finite) simplicial complex (simp. cpx.)) とは次をみたすこと．

(1) $\emptyset \notin K$,

(2) $\forall \sigma \in K, \forall \tau \subset \sigma, (\tau \neq \emptyset \Rightarrow \tau \in K)$.

各 $\sigma \in K$ を K の **面** (face) または K の **単体** (simplex) という．
$\dim \sigma = (\sigma$ に含まれる減の個数$) - 1$ を σ の **次元** (dimension) といい，
$\dim K = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$ を K の **次元** という．
また，$V(K) = \{v \in \tilde{V} \mid \{v\} \in K\}$ を K の **頂点集合** (set of vertices) といい，$V(K)$ の元を K の **頂点** (vertex) という．

- 混乱のおそれが無ければ $\tilde{V}$ がどんな集合か明言しないことが多い．

Ex. 3.7. Ex. 3.5 の幾何的単体複体に対応する抽象単体複体 K は次のようになる．

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \{v_0\}, \{v_1\}, \ldots, \{v_9\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_7, v_9\}, \{v_8, v_9\}, \\ \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \\ \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \end{array} \right\}$$

- 逆に抽象単体複体から幾何的単体複体を作ることもできる．

Def. 3.8. K: (abstract) simp. cpx., $V(K) = \{v_0, \ldots, v_m\}$ のとき，
$u_0, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^N$ が次をみたすとする．

(1) 各 $\sigma = \{i_0, \ldots, i_k\} \in K$ に対し，$u_{i_0}, \ldots, u_{i_k}$ は一般の位置にある．

(2) 各 $\sigma, \tau \in K$ に対し，$|\sigma| \cap |\tau| = |\sigma \cap \tau|$ となる．

ただし $\sigma = \{i_0, \ldots, i_k\}$ のとき

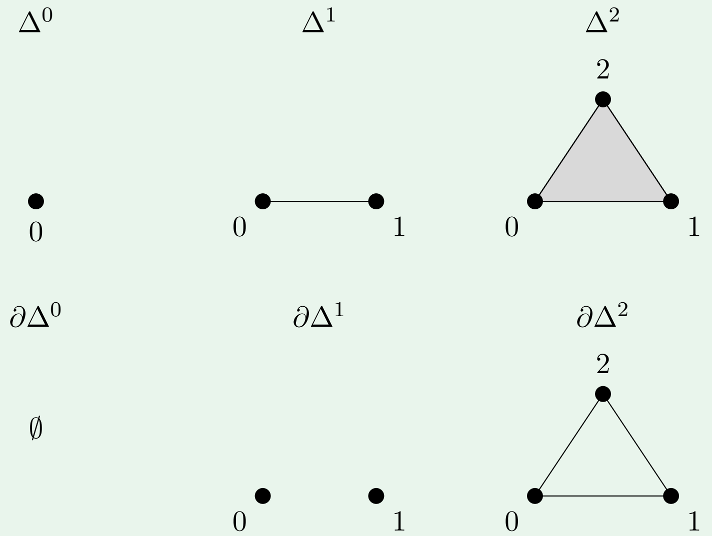
$$|\sigma| = \left\{ \sum_{j=0}^{k} t_j u_{i_j} \;\middle|\; \forall j, t_j \geq 0, \sum_{j=0}^{k} t_j = 1 \right\}$$

とする．
すると，$\mathrm{Geom}\, K = \{|\sigma| \mid \sigma \in K\}$ は $\mathbb{R}^N$ 内の幾何的単体複体となる．
このとき，$\mathrm{Geom}\, K$ や $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ を K の **幾何的実現** (geometric realization) という．

Ex. 3.9.

$$\Delta^n = \{\sigma \subset \{0, 1, \ldots, n\} \mid \sigma \neq \emptyset\}$$
$$\partial\Delta^n = \Delta^n \setminus \{\{0, 1, \ldots, n\}\}$$

の幾何的実現は $n = 0, 1, 2$ のとき次のようになる.



4　単体複体のホモロジー群

Def. 4.1. K: simp. cpx., $K_q \subset K$: the subset of q-simplices とする．
$C_q(K)$ を K_q の元を基底とする free ab. gp. とする．つまり

$$C_q(K) = \left\{ \sum_{\sigma \in K_q} a_\sigma \sigma \,\middle|\, \forall \sigma, a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\sum_{\sigma \in K_q} a_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in K_q} a'_\sigma \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \forall \sigma,\ a_\sigma = a'_\sigma,$$
$$\sum_{\sigma \in K_q} a_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in K_q} b_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in K_q} (a_\sigma + b_\sigma)\sigma.$$

$q < 0$ のときは $C_q(K) = 0$ とする．
$V(K)$ の全順序をひとつ固定する（どんなものでもよい）．
すると，各 $\sigma \in K_q$ に対し頂点を小さい順に $v_0 < v_1 < \cdots < v_q$ のように並べることができる．
このとき，$\sigma = \langle v_0 v_1 \cdots v_q \rangle$ と書く．
境界準同型 (boundary map) $\partial\colon C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ を次で定まる hom. とする．

$$\partial \langle v_0 \cdots v_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q \rangle \quad (\widehat{v_i} \text{ は } v_i \text{ を除くことを意味する})$$

Rem. 4.2. $C_q(K)$ は free なので basis の像を決めれば hom. が定まる．

Ex. 4.3.

$$\partial \langle a \rangle = 0,$$
$$\partial \langle ab \rangle = \langle b \rangle - \langle a \rangle,$$
$$\partial \langle abc \rangle = \langle bc \rangle - \langle ac \rangle + \langle ab \rangle.$$

Lem. 4.4. $C_*(K) = ((C_q(K))_q, \partial)$ は ch. cpx.

Proof. 各 $\sigma = \langle v_0 \cdots v_q \rangle$ $(q = 2, \ldots, \dim K)$ に対し $\partial(\partial\sigma) = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \partial \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j \langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots v_q \rangle \right) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots \widehat{v_j} \cdots v_q \rangle \right) + \sum_{i=j+1}^{q} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^{j-1} \langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q \rangle \right) \\
&= \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots \widehat{v_j} \cdots v_q \rangle + \sum_{0 \le j < i \le q} (-1)^{i+j-1} \langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Def. 4.5. K: simp. cpx. のとき $C_*(K)$ を **K に付随するチェイン複体**といい，そのホモロジー群 $H_*(K)=H_*(C_*(K))$ を **K のホモロジー群**という（$Z_q(K)=Z_q(C_*(K)), B_q(K)=B_q(C_*(K))$ という表記も使う）.

- いくつか計算例を与えておく.
- 以下で $\mathbb{Z}\{x_1,\dots,x_r\}$ は $x_1,\dots,x_r$ を basis とする free ab. gp. を表す.

Ex. 4.6. $K=\{\{v\}\}$（1 点）のとき，

$$C_q(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}\{\langle v\rangle\} & (q=0)\\ 0 & (q\neq 0)\end{cases}$$

より

$$H_q(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}\{[\langle v\rangle]\} & (q=0)\\ 0 & (q\neq 0)\end{cases}$$

Ex. 4.7. $\partial\Delta^2=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}$ のホモロジー群を求める.

$$C_q(\partial\Delta^2)=\begin{cases}\mathbb{Z}\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & (q=0)\\ \mathbb{Z}\{\langle 01\rangle,\langle 02\rangle,\langle 12\rangle\} & (q=1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}Z_0(\partial\Delta^2)&=\mathbb{Z}\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\}\\ B_0(\partial\Delta^2)&=\mathbb{Z}\{\langle 1\rangle-\langle 0\rangle,\langle 2\rangle-\langle 0\rangle\}\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\partial\langle 01\rangle&=\langle 1\rangle-\langle 0\rangle\\ \partial\langle 02\rangle&=\langle 2\rangle-\langle 0\rangle\\ \partial\langle 12\rangle&=\langle 2\rangle-\langle 1\rangle=(\langle 2\rangle-\langle 0\rangle)-(\langle 1\rangle-\langle 0\rangle)\end{aligned}$$

であり，$\langle 1\rangle-\langle 0\rangle,\langle 2\rangle-\langle 0\rangle$ は線型独立. □

$\langle 1\rangle-\langle 0\rangle,\langle 2\rangle-\langle 0\rangle,\langle 0\rangle$ は $Z_0(\partial\Delta^2)$ の basis なので，$H_0(\partial\Delta^2)=\mathbb{Z}\{[\langle 0\rangle]\}$.

Rem. 4.8. $[\langle 0\rangle]=[\langle 1\rangle]=[\langle 2\rangle]$.

また，

$$Z_1(\partial\Delta^2)=\mathbb{Z}\{\langle 01\rangle-\langle 02\rangle+\langle 12\rangle\}$$

Proof. $\partial(a\langle 01\rangle + b\langle 02\rangle + c\langle 12\rangle) = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a(\langle 1\rangle - \langle 0\rangle) + b(\langle 2\rangle - \langle 0\rangle) + c(\langle 2\rangle - \langle 1\rangle)\\ &= (-a-b)\langle 0\rangle + (a-c)\langle 1\rangle + (b+c)\langle 2\rangle\end{aligned}$$

であり，$\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle$ は線型独立なので，$-a-b = a-c = b+c = 0$ となり，これを解くと $a = -b = c$.

よって $\langle 01\rangle - \langle 02\rangle + \langle 12\rangle$ は $Z_1(\partial\Delta^2)$ の basis. □

であり，$B_1(\partial\Delta^2) = 0$ なので，$H_1(\partial\Delta^2) = \mathbb{Z}\{[\langle 01\rangle - \langle 02\rangle + \langle 12\rangle]\}$.

ゆえに，

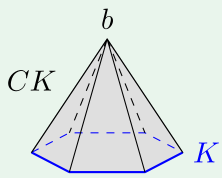
$$H_q(\partial\Delta^2) \cong \begin{cases}\mathbb{Z} & (q = 0, 1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

Def. 4.9. K, L: simp. cpx. のとき，

$$K * L = K \sqcup L \sqcup \{\sigma \sqcup \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}$$

を K と L の **join** という．これは simp. cpx. になる．

Ex. 4.10. $CK = K * \{\{b\}\}$ を K の **錐** (cone) という．



hom. $\Phi\colon C_q(CK) \to C_{q+1}(CK)$ を $\Phi\langle v_0 \cdots v_q\rangle = (-1)^{q+1}\langle v_0 \cdots v_q b\rangle, \Phi\langle v_0 \cdots v_{q-1} b\rangle = 0$ $(v_0, \ldots, v_q \in V(K))$ で定めると，

$q \geq 1$ のとき $c \in C_q(CK)$ に対し，$(\partial\Phi + \Phi\partial)c = c$ が成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned}\partial\Phi\langle v_0 \cdots v_q\rangle &= (-1)^{q+1}\partial\langle v_0 \cdots v_q b\rangle\\ &= (-1)^{q+1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q b\rangle + (-1)^{q+1}\langle v_0 \cdots v_q\rangle\right)\\ &= -\Phi\partial\langle v_0 \cdots v_q\rangle + \langle v_0 \cdots v_q\rangle\end{aligned}$$

$(\partial\Phi + \Phi\partial)\langle v_0 \cdots v_{q-1} b\rangle = \langle v_0 \cdots v_{q-1} b\rangle$ も容易に確認できる（略）. □

これより任意の $z \in Z_q(CK)$ に対し $z = (\partial\Phi + \Phi\partial)z = \partial(\Phi z) \in B_q(CK)$ なので，$H_q(CK) = 0$.

また，CK は連結（演習参照）なので $H_0(CK) = \mathbb{Z}\{[\langle b\rangle]\}$.

5 単体写像とその誘導準同型

Def. 5.1. K, L: simp. cpx. のとき，写像 $f\colon V(K) \to V(L)$ が **単体写像** (simplicial map (simp. map)) とは，各 $\sigma \in K$ に対し $f(\sigma) \in L$ となること（$f(\sigma)$ は f による σ の像）．このとき，$f\colon K \to L$ と書く．

Ex. 5.2. (1) K: simp. cpx. のとき，$L \subset K$ が **部分複体** (subcomplex (subcpx.)) とは，L も単体複体となること．このとき，包含写像 $L \to K$ は simp. map．特に $L = K$ のとき，恒等写像は単体写像 $\mathrm{id}_K\colon K \to K$ を与える．

(2) K, L: simp. cpx.，$v_0 \in V(L)$ のとき，$f(w) = v_0$ で定まる $f\colon V(K) \to V(L)$（const. map）は単体写像 $f\colon K \to L$ を与える．

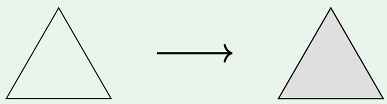
Def. 5.3. (1) $f_1\colon K_1 \to K_2, f_2\colon K_2 \to K_3$: simp. map のとき，合成写像 $f_2 \circ f_1\colon V(K_1) \to V(K_3)$ は simp. map の **合成** $f_2 \circ f_1\colon K_1 \to K_3$ を定める．

(2) $f\colon K_1 \to K_2$: simp. map に対し，$f\colon V(K_1) \to V(K_2)$ が全単射であって，$f{-}1\colon V(K_2) \to V(K_1)$ も simp. map を与えるとき（$f^{-1}\colon K_2 \to K_1$ と書く），f は **（単体複体の）同型写像** という．K_1 から K_2 への isom. が存在するとき，K_1 と K_2 は **（単体複体として）同型** という．

- simp. map $f\colon K \to L$ は幾何的実現の間の conti. $|f|\colon |K| \to |L|$ を誘導する．
- $f\colon K \to L, g\colon L \to M$: simp. map のとき，$|\mathrm{id}_K| = \mathrm{id}_{|K|}, |g \circ f| = |g| \circ |f|$ が成り立つ．特に，f が isom. なら $|f|$ は homeo.

Ex. 5.4. inclusion $f\colon \partial\Delta^n \to \Delta^n$ は $f\colon V(\partial\Delta^n) \to V(\Delta^n)$: 全単射だが，$f^{-1}(\{0, 1, \ldots, n\}) \notin \partial\Delta^n$ なので，f は isom. ではない．

$n = 2$



- K: simp. cpx. のとき，$V(K)$ に全順序を与えて $C_q(K)$ の basis $\langle v_0 \cdots v_q \rangle$ ($v_0 < \cdots < v_q$) を定め，∂ を定義した．
  - simp. map の誘導 ch. map を定めるために記号を拡張する．
  - $v_0 < \cdots < v_q$ のとき，$0, \ldots, q$ を並べ替えた $i_0, \ldots, i_q$ に対し

$$\langle v_{i_0} \cdots v_{i_q} \rangle = \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & q \\ i_0 & \cdots & i_q \end{pmatrix} \langle v_0 \cdots v_q \rangle$$

とする．
  - ある $i \neq j$ に対し $v_i = v_j$ となるとき，

$$\langle v_0 \cdots v_q \rangle = 0$$

とする．

Ex. 5.5.

$$\langle ab\rangle = -\langle ba\rangle$$
$$\langle abc\rangle = -\langle acb\rangle = -\langle bac\rangle = \langle bca\rangle = \langle cab\rangle = -\langle cba\rangle$$

- $v_0, \dots, v_q \in V(K)$ が小さい順に並んでいなかったり重複があっても

$$\partial\langle v_0 \cdots v_q\rangle = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q\rangle$$

が成り立つことが確認できる．

Def. 5.6. $f\colon K \to L$: simp. map のとき，$f\colon C_q(K) \to C_q(L)$: hom. を次で定める．

$$f_\sharp\langle v_0 \cdots v_q\rangle = \langle f(v_0) \cdots f(v_q)\rangle$$

Rem. 5.7. ある $i \neq j$ に対し $f(v_i) = f(v_j)$ のとき，$f_\sharp\langle v_0 \cdots v_q\rangle = 0$ となることに注意．

Lem. 5.8. $f_\sharp\colon C_*(K) \to C_*(L)$ は ch. map.

Proof.

$$\begin{aligned} f_\sharp(\partial\langle v_0 \cdots v_q\rangle) &= f_\sharp\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_q\rangle\right) \\ &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle f(v_0) \cdots \widehat{f(v_i)} \cdots f(v_q)\rangle = \partial\langle f(v_0) \cdots f(v_q)\rangle = \partial(f_\sharp\langle v_0 \cdots v_q\rangle) \end{aligned}$$

□

- ch. map の一般論から次が定義できる．

Def. 5.9. $f\colon K \to L$: simp. map のとき，$f_\sharp$ の誘導準同型 $f_*\colon H_q(K) \to H_q(L)$ $(f_*[x] = [f_\sharp(x)])$ を f のホモロジー群への **誘導準同型** という．

- $(\mathrm{id}_K)_\sharp\colon C_q(K) \to C_q(K), (\mathrm{id}_K)_*\colon H_q(K) \to H_q(K)$ は恒等写像.
- $f\colon K \to L, g\colon L \to M$ に対し $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp, (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ.
- $f\colon K \to L$ が isom. のとき，$f_\sharp\colon C_q(K) \to C_q(L), f_*\colon H_q(K) \to H_q(L)$ は isom. となる（$(f_\sharp)^{-1} = (f^{-1})_\sharp, (f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ となる）.

Ex. 5.10. K, L: conn. simp. cpx., $f\colon K \to L$: simp. map のとき，$f_*\colon H_0(K) \to H_0(L)$ は isom. 実際，$v \in V(K)$ に対し $[\langle v\rangle] \in H_0(K), [\langle f(v)\rangle] \in H_0(L)$ はそれぞれ basis であり，

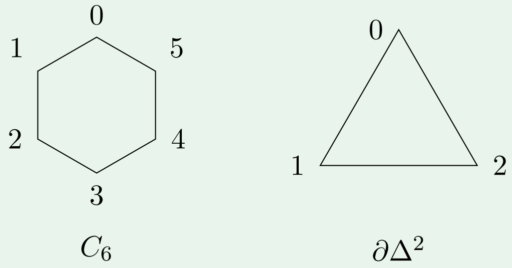
$$f_*[\langle v\rangle] = [f_\sharp\langle v\rangle] = [\langle f(v)\rangle]$$

となり，basis を basis に写す.

Ex. 5.11.

$$C_6 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{0, 1\}, \{0, 5\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$$
$$f\colon C_6 \to \partial\Delta^2, \quad f(0) = f(3) = 0, \quad f(1) = f(4) = 1, \quad f(3) = f(5) = 2$$

とする（下図）.



すると

$$\alpha = [\langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 23\rangle + \langle 34\rangle + \langle 45\rangle + \langle 50\rangle] \in H_1(C_6), \quad \beta = [\langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 20\rangle] \in H_1(\partial\Delta^2)$$

はそれぞれの basis.

$$\begin{aligned} f_*\alpha &= f_*[\langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 23\rangle + \langle 34\rangle + \langle 45\rangle + \langle 50\rangle] \\ &= [\langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 20\rangle + \langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 20\rangle] = 2\beta \end{aligned}$$

となる．したがって $f_*(H_1(C_6)) \subset H_1(\partial\Delta^2)$ は index 2 の subgp.

6 完全列とホモロジー長完全列

Def. 6.1. ab.gp. と hom. の列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が **（M で）完全** (exact (at M)) であるとは，$\operatorname{im} f = \ker g$ となること．

Ex. 6.2.
- $0 \to M \xrightarrow{f} N$: exact $\Leftrightarrow$ f: inj.

  Proof. $0 \to M \xrightarrow{f} N$: exact $\Leftrightarrow 0 = \operatorname{im} 0 = \ker f \Leftrightarrow f$: inj. □

- $M \xrightarrow{f} N \to 0$: exact $\Leftrightarrow$ f: sur.

  Proof. $M \xrightarrow{f} N \to 0$: exact $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = \ker 0 = N \Leftrightarrow f$: surj. □

- $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$, $f = 0$, $g = 0 \Rightarrow M = 0$

  Proof. $0 = \operatorname{im} f = \ker g = M$ □

Def. 6.3. ab.gp. と hom. の列

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n$$

が **完全** (exact) とは，各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対し，$M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1}$ が完全（M_i で完全）となること．

Ex. 6.4. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を **短完全列** (short exact sequence) という．
このとき，$\bar{g}\colon M/\operatorname{im} f \to N$: isom. ($\bar{g}(x) = g(x)$).

Proof. $\ker g = \operatorname{im} f$, g: surj. なので準同型定理から． □

- 次の Lem. は完全列の計算で時々使われる．

Lem. 6.5. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$: exact, $h\colon N \to M$: hom., $g \circ h = \mathrm{id}_N$ のとき，$(f,h)\colon L \oplus N \to M$, $(f,h)(y,z) = f(y) + h(z)$ は isom. （このような h が存在するとき短完全列は **分裂する** (split) という）

Proof. （単射性）$(f,h)(y,z) = 0$ とすると $f(y) + h(z) = 0$.
これを g で写すと $0 = g(f(y) + h(z)) = 0 + z = z$.
また，$0 = f(y) + h(z) = f(y) + 0 = f(y)$ と f: inj. であることから $y = 0$ となり，(f,h) は単射.
（全射性）$x \in M$ をとる．
$z = g(x)$ とすると，$g(x - h(z)) = g(x) - z = 0$ なので，完全性から $f(y) = x - h(z)$ となる $y \in L$ が存在する．よって $x = f(y) + h(z)$ となり，(f,h) は全射. □

- 次の Lem. から上の短完全列は N が free なら split する．

Lem. 6.6. M: ab.gp., N: fin. gen. ab. gp., $g\colon M \to N$: surj. hom. のとき，
$h\colon N \to M$: hom. であって，$g \circ h = \mathrm{id}_N$ となるものが存在.

Def. 6.7. ch. cpx. と ch. map の列 $0 \to C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \to 0$ が ch. cpx. の短完全列とは，
各 $q \in \mathbb{Z}$ に対し，$0 \to C_q \xrightarrow{f} C'_q \xrightarrow{g} C''_q \to 0$ が短完全列となること.

Def. 6.8. $0 \to C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \to 0$: ch. cpx. の短完全列のとき，**連結準同型** (connecting hom.)
$\partial_*\colon H_q(C'') \to H_{q-1}(C)$ を次で定める：
各 $z'' \in Z_q(C'')$ に対し，$g(c') = z''$ となる $c' \in C'_q$，$f(z) = \partial c'$ となる $z \in Z_{q-1}(C)$ によって
$\partial_*[z''] = [z]$ と定める.

Lem. 6.9. ∂_* は well-defined な hom.

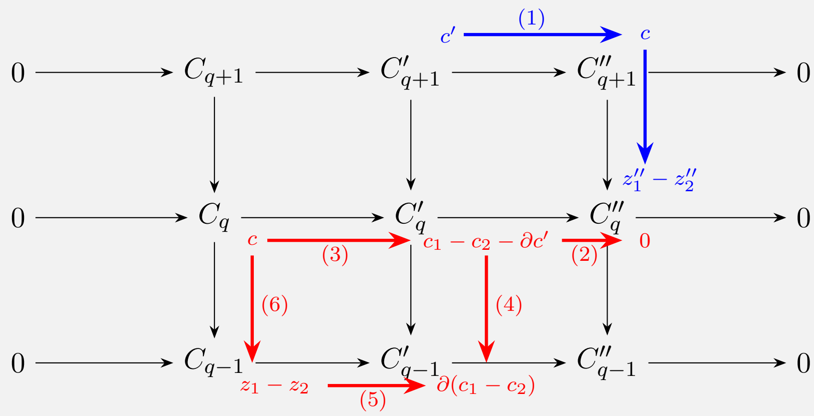
Proof.

- このような c', z が存在すること

  g: surj. なので $g(c') = z''$ となる $c' \in C_q$ が存在.
  g: ch. map なので $g(\partial c') = \partial g(c') = \partial z'' = 0$.
  完全性より $f(z) = \partial c'$ となる $z \in C_{q-1}$ が存在.
  f: ch. map なので $f(\partial z) = \partial f(z) = \partial(\partial c') = 0$.
  f: inj. なので $\partial z = 0$ となり $z \in Z_{q-1}$(C).

- z'', c', z のとりかたによらないこと

  $[z''_1] = [z''_2]$ とすると $\partial c'' = z''_1 - z''_2$, $g(c'_1) = z''_1$, $g(c'_2) = z''_2$, $f(z_1) = \partial c'_1$, $f(z_2) = \partial c'_2$
  となる $c'', c'_1, c'_2, z_1, z_2$ がとれる.
  g: surj. なので $g(c') = c''$ となる $c' \in C'_{q+1}$ が存在（下図 (1)).
  $g(c'_1 - c'_2 - \partial c') = g(c'_1) - g(c'_2) - \partial g(c') = z'_1 - z'_2 - \partial c'' = 0$（下図 (2)）
  完全性より $f(c) = c'_1 - c'_2 - \partial c'$ となる $c \in C_q$ が存在（下図 (3)).
  $f(\partial c) = \partial f(c) = \partial(c'_1 - c'_2 - \partial c') = f(z_1) - f(z_2) = f(z_1 - z_2)$（下図 (4), (5)）
  f: inj. なので，$\partial c = z_1 - z_2$（下図 (6)）となり，$[z_1] = [z_2]$ in $H_{q-1}(C)$.



（上のような図を描きながら考えてもよい (diagram chasing)）

- ∂_*: hom. となること

  $[z_1''], [z_2''] \in H_q(C'')$ とすると，$g(c_1') = z_1''$, $g(c_2') = z_2''$, $f(z_1) = \partial c_1'$, $f(z_2) = \partial c_2'$ となる c_1', c_2', z_1, z_2 がとれる．

  このとき，$g(c_1' + c_2') = z_1'' + z_2''$，$f(z_1 + z_2) = \partial(c_1' + c_2')$ なので，

  $\partial_*[z_1'' + z_2''] = [z_1 + z_2] = [z_1] + [z_2] = \partial_*[z_1''] + \partial_*[z_2'']$

$\square$

Thm. 6.10 (ホモロジー長完全列)**.** $0 \to C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \to 0$: ch. cpx. の短完全列のとき，次は完全.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(C') \xrightarrow{g_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

Proof.

- Exactness at $H_q(C')$:

  $[z] \in H_q(C)$ に対し $g_*(f_*[z]) = [g(f(z))] = [0] = 0$ となり，$\operatorname{im} f_* \subset \ker g_*$.

  $[z'] \in \ker g_* (\subset H_q(C'))$ とすると，$[g(z')] = 0$ より $g(z') = \partial c''$ となる $c' \in C''_{q+1}$ が存在.

  g: surj. なので $g(c') = c''$ となる $c' \in C'_{q+1}$ が存在.

  $g(z' - \partial c') = g(z') - \partial g(c') = \partial c'' - \partial c'' = 0$ なので

  完全性から $f(z) = z' - \partial c'$ となる $z \in C_{q+1}$ が存在.

  $f(\partial z) = \partial f(z) = \partial(z' - \partial c') = 0$ と f: inj. となることから $\partial z = 0$ となり $z \in Z_{q+1}(C)$.

  よって $[z] \in H_q(C)$ であり，$f_*[z] = [f(z)] = [z' - \partial c'] = [z']$ なので $\operatorname{im} f_* \supset \ker g_*$.

  以上から $\operatorname{im} f_* = \ker g_*$.

- Exactness at $H_q(C)$:

  $[z''] \in H_{q+1}(C'')$ に対し $g(c') = z''$ となる $c' \in C'_{q+1}$ と $f(z) = \partial c'$ となる $z \in Z_q(C)$ をとる.

  このとき，$f_*(\partial_*[z'']) = f_*[z] = [f(z)] = [\partial c'] = 0$ となり，$\operatorname{im} \partial_* \subset \ker f_*$.

  $[z] \in \ker f_* (\subset H_q(C))$ とすると，$[f(z)] = 0$ より $f(z) = \partial c'$ となる $c' \in C'_{q+1}$ が存在.

  $z'' = g(c') \in C''_{q+1}$ とおくと，$\partial z'' = \partial g(c') = g(\partial c') = g(f(z)) = 0$ より $z'' \in Z_{q+1}(C'')$.

  いま $g(c') = z'', f(z) = \partial c'$ なので $\partial_*[z''] = [z]$ となり，$\operatorname{im} \partial_* \supset \ker f_*$.

  以上から $\operatorname{im} \partial_* = \ker f_*$.

- Exactness at $H_q(C'')$: exercise!

$\square$

7 Mayer–Vietoris 完全列

- simp. cpx. に付随する ch. cpx. は巨大になることが多く，ホモロジーの計算は一般に大変だが，Mayer–Vietoris 完全列を使うと計算が楽になることがある．

- K: simp. cpx., $L_1, L_2 \subset K$: subcpx., $K = L_1 \cup L_2$ とし，
$i_k\colon L_1 \cap L_2 \to L_k$, $j_k\colon L_k \to K$ $(k = 1, 2)$ を incl. とする．

Lem. 7.1. 次は exact.

$$0 \to C_*(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{I} C_*(L_1) \oplus C_*(L_2) \xrightarrow{J} C_*(K) \to 0$$

ここで $I(c) = ((i_1)_\sharp c, (i_2)_\sharp c)$, $J(c_1, c_2) = (j_1)_\sharp c_1 - (j_2)_\sharp c_2$.

Proof. • I: inj. は略（easy）．

- $\operatorname{im} I \subset \ker J$:
$c \in C_q(L_1 \cap L_2)$ に対し

$$J(I(c)) = J((i_1)_\sharp c, (i_2)_\sharp c) = (j_1)_\sharp((i_1)_\sharp c) - (j_2)_\sharp((i_2)_\sharp c) = (j_1 \circ i_1)_\sharp c - (j_2 \circ i_2)_\sharp c = 0$$

ここで $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ $(=$ incl. $L_1 \cap L_2 \to K)$ であることを用いた．
よって $\operatorname{im} I \subset \operatorname{im} J$ となる．

- $\operatorname{im} I \supset \ker J$:
$(L_1)_q, (L_2)_q$: それぞれの q-simp. の集合とする．

$$c_1 = \sum_{\sigma \in (L_1)_q} a_\sigma \sigma, \quad c_2 = \sum_{\sigma \in (L_2)_q} b_\sigma \sigma, \quad J(c_1, c_2) = 0$$

とすると

$$0 = J(c_1, c_2) = \sum_{\sigma \in (L_1)_q \cap (L_2)_q} (a_\sigma - b_\sigma)\sigma + \sum_{\sigma \in (L_1)_q \setminus (L_2)_q} a_\sigma \sigma - \sum_{\sigma \in (L_2)_q \setminus (L_1)_q} b_\sigma \sigma$$

これより，$\sigma \in (L_1)_q \setminus (L_2)_q$ のとき $a_\sigma = 0$，$\sigma \in (L_2)_q \setminus (L_1)_q$，のとき $b_\sigma = 0$.
よって $c_1 = \displaystyle\sum_{\sigma \in (L_1)_q \cap (L_2)_q} a_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in (L_1)_q \cap (L_2)_q} b_\sigma \sigma = c_2$ なので，
$c = c_1 = c_2 \in C_1(L_1 \cap L_2)$ とおけば $I(c) = (c_1, c_2)$．従って $\operatorname{im} I \supset \ker J$.

- J: surj.:
$c = \displaystyle\sum_{\sigma \in K_q} a_\sigma \sigma$ に対し，$c_1 = \displaystyle\sum_{\sigma \in (L_1)_q} a_\sigma \sigma$, $c_2 = \displaystyle\sum_{\sigma \in (L_2)_q \setminus} (-a_\sigma)\sigma$ とおくと，$J(c_1, c_2) = c$.
よって J: surj.

□

Thm. 7.2 (Mayer–Vietoris 完全列)**.** K: simp. cpx., $L_1, L_2 \subset K$: subcpx., $K = L_1 \cup L_2$, $i_k\colon L_1 \cap L_2 \to L_k$, $j_k\colon L_k \to K$ $(k = 1, 2)$ を incl. とする．
このとき，ある（自然な）hom. $\Delta_*\colon H_q(K) \to H_{q-1}(L_1 \cap L_2)$ $(q \in \mathbb{Z})$ が存在して次は exact.

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_*} H_q(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{I_*} H_q(L_1) \oplus H_q(L_2) \xrightarrow{J_*} H_q(K) \xrightarrow{\Delta_*} H_{q-1}(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{I_*} \cdots$$

ここで $I_*x = ((i_1)_*x, (i_2)_*x)$, $J_*x = (j_1)_*x - (j_2)_*x$.

Proof. 上の Lem. と前回の Thm. から従う． □

Rem. 7.3.
- conn. hom. Δ_* は具体的にわからなくてもよいことが多い．
- $H_*(K), H_*(L_1), H_*(L_2), H_*(L_1 \cap L_2)$ のうち 3 つがわかっているときに残りの 1 つを求める，という使い方が多い（必ず求められるわけではない）．

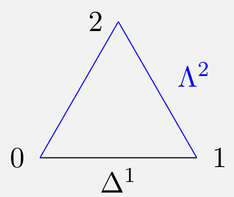
Thm. 7.4. $n \geq 1$ のとき

$$H_q(\partial\Delta^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Rem. 7.5. $n = 0$ のとき $\partial\Delta^1 = \{\{0\}, \{1\}\}$（2 点集合）なので次のようになる．

$$H_q(\partial\Delta^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

Proof.
- $\partial\Delta^{n+1} = \Delta^{n+1} \setminus \{0, 1, \ldots, n+1\}$ であった．
  $\Lambda^{n+1} = \partial\Delta^{n+1} \setminus \{\{0, 1, \ldots, n\}\}$（horn という）は $\partial\Delta^{n+1}$ の subcpx.
  $\Delta^n \cup \Lambda^{n+1} = \partial\Delta^{n+1}$, $\Delta^n \cap \Lambda^{n+1} = \partial\Delta^n$ が成り立つ．



- $\Delta^n \cong C\Delta^{n-1}$, $\Lambda^{n+1} \cong C(\partial\Delta^n)$ (cone) である．

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{n-1} * \{\{n\}\} = \Delta^{n-1} \sqcup \{\{n\}\} \sqcup \{S \sqcup \{n\} \mid \emptyset \neq S \in \Delta^{n-1}\} = \Delta^n \\
&\partial\Delta^n * \{n+1\} \\
&= (\Delta^n \setminus \{\{0,1,\dots,n\}\}) \sqcup \{\{n+1\}\} \sqcup \{S \sqcup \{n+1\} \mid S \in \Delta^n \setminus \{\{0,1,\dots,n\}\}\} \\
&= \Delta^{n+1} \setminus \{\{0,1,\dots,n\},\{0,1,\dots,n+1\}\} = \Lambda^{n+1}
\end{aligned}
$$

□

よって

$$
H_q(\Delta^n) \cong H_q(\Lambda^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q=0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}
$$

- $n=1$ のとき，$\partial\Delta^2 = \Delta^1 \cup \Lambda^2$ に関する Mayer–Vietoris 完全列は次のようになる．

$$
0 \to H_1(\partial\Delta^2) \xrightarrow{\Delta_*} H_0(\partial\Delta^1) \xrightarrow{I_*} H_0(\Delta^1) \oplus H_0(\Lambda^2) \xrightarrow{J_*} H_0(\partial\Delta^2) \to 0
$$

$\partial\Delta^2$ は連結なので，$H_0(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$.
$H_0(\partial\Delta^1) = \mathbb{Z}\{[\langle 0\rangle],[\langle 1\rangle]\}$ であり，Δ^1, Λ^2 は連結なので

$$
I_*[\langle 1\rangle] = ([\langle 1\rangle],[\langle 1\rangle]) = ([\langle 0\rangle],[\langle 0\rangle]) = I_*([\langle 0\rangle]) \neq 0
$$

よって $H_1(\partial\Delta^2) \cong \operatorname{im}\Delta_* = \ker I_* \cong \mathbb{Z}$ となる．

- $n \geq 2$ のとき $n-1$ で定理が成り立つとすると $\partial\Delta^{n+1} = \Delta^n \cup \Lambda^{n+1}$ に関する Mayer–Vietoris 完全列から

$$
0 \to H_1(\partial\Delta^{n+1}) \xrightarrow{\Delta_*} H_0(\partial\Delta^n) \xrightarrow{I_*} H_0(\Delta^n) \oplus H_0(\Lambda^{n+1}) \xrightarrow{J_*} H_0(\partial\Delta^{n+1}) \to 0 \tag{1}
$$

$$
0 \to H_q(\partial\Delta^{n+1}) \to H_{q-1}(\partial\Delta^n) \to 0 \tag{2}
$$

は完全．ただし $q \geq 2$.
まず $\partial\Delta^{n+1}$ は連結なので $H_0(\partial\Delta^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$.
完全列 (1) において $H_0(\partial\Delta^n) = \mathbb{Z}\{[\langle 0\rangle]\}$ であり
$I_*[\langle 0\rangle] = ([\langle 0\rangle],[\langle 0\rangle]) \neq 0$ in $H_0(\Delta^n) \oplus H_0(\Lambda^{n+1}) \cong \mathbb{Z}^2$ なので I_* は inj.
これより Δ_* は 0 写像かつ inj. となり $H_1(\partial\Delta^{n+1}) = 0$.
さらに，完全列 (2) より $q \geq 2$ のとき $H_q(\partial\Delta^{n+1}) \cong H_{q-1}(\partial\Delta^n)$.
以上から定理が成り立つ．

□