目標1:
セルを貼り付けて得られる空間のコホモロジーから$\pi_i(S^n)$の非自明な元をみつける

2024
都立大集中講義 4-1

目標2:
Serreファイブレーションのホモトピー長完全列を用いてホモトピー群を計算する.

〈セルの貼り付けとコホモロジー〉

- $S^n \times S^n$
  - $S^n \times S^n$ は $S^n \vee S^n$ (S^nとS^nの1点和) に 2n-セルを貼って得られる.
    i.e. $S^n \times S^n = (S^n \vee S^n) \cup_\varphi D^{2n}$
  - わかりにくければ $n=1$ で考えてみる.
    $S^1 \vee S^1$ は ∂I^2 の向かい合う辺を同一視したもの

$S^1 \times S^1$ (トーラス) は ∂I^2 に D^2 を貼ってから向かい合う辺を同一視したもの.

同じことを $D^n \times D^n$ に対して考えればわかりやすい.

- $X = S^n \cup_\psi D^{2n}$ をつくる.
  - S^n の基点 $x_0 \in S^n$ を固定し, $(x, x_0) \sim (x_0, x)$ $(x \in S^n)$
    で生成される同値関係による商空間を $X = S^n \times S^n/\sim$ とする.
  - $S^n \times S^n$ は $S^n \vee S^n$ に D^{2n} を貼った空間だったので,
    Xは $S^n \vee S^n/\sim \cong S^n$ に D^{2n} を貼った空間. つまり $X = S^n \cup_\psi D^{2n}$.
  - これより
$$H^i(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\{1\} & (i=0) \\ \mathbb{Z}\{u\} & (i=n) \\ \mathbb{Z}\{v\} & (i=2n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} u \in H^n(X) \\ v \in H^{2n}(X) \end{matrix} \text{ は基底} \right)$$
  - 接着写像 $\psi: S^{2n-1} \to S^n$ が定値写像とホモトピックでも同じ結果になる.
    しかし 積構造は違うかもしれない!

問 $v = a u^2$ となる $a \in \mathbb{Z}$ を求めよ. $\cdots$ (*)

— ψが定値写像とホモトピックなら, $X = S^n \vee S^{2n}$ と思ってよい.
S^{2n} を1点につぶす写像 $f: X \to S^n$ を考える.
Mayer-Vietorisを用いてきちんと計算すると $f^*: H^n(S^n) \xrightarrow{\cong} H^n(X)$: 同型.
つまり $f^* u_0 = u$ $(u_0 \in H^n(S^n))$ とすると
$u^2 = (f^* u_0)^2 = f^*(u_0^2) = f^* 0 = 0$.
$(u_0^2 \in H^{2n}(S^n) = 0)$

S^{2n}は2n次元の空間だが
次元より高い4n-1次のホモトピー群が非自明!
ホモトピー群とホモロジー群は全くちがう!!

よってこのときは $a=0$ となる. $\rightsquigarrow$ $a \neq 0$ なら ψは$\pi_{2n-1}(S^n)$の非自明な元!!

2024
都立大集中講義 4-2

$\boxed{宿題23}$ 前ページの"きちんと計算すると"の部分を実際に"きちんと計算"せよ.

- 実は(*)のaは次のようにして計算できる.
  - n : odd のとき $\underbrace{u \smile u}_{入れ替え} = (-1)^{n^2} u \smile u = -u \smile u$ より $2 u \smile u = 0$.

    よって $u \smile u = 0$ となり $a = 0$.

    注: だからといって ψ が定値写像とホモトピックというわけではない.

    この方法では非自明かどうかわからないだけ.
  - n : even のとき

    商写像 $g : S^n \times S^n \longrightarrow X$ の誘導準同型もきちんと計算すると

    $g^* u = u_0 \times 1 + 1 \times u_0$ in $H^n(S^n \times S^n)$

    $g^* v = u_0 \times u_0$ in $H^{2n}(S^n \times S^n)$ となる(ようにvがとれる)

$\boxed{宿題24}$ これを"きちんと計算"して示せ.

いま $g^*(u^2) = g^*(av) = a(g^*v) = a u_0 \times u_0$ だが

一方 $g^*(u^2) = (g^* u)^2 = (u_0 \times 1 + 1 \times u_0)^2$

$= u_0^2 \times 1 + u_0 \times u_0 + u_0 \times u_0 + 1 \times u_0^2 = 2 u_0 \times u_0$.

よって $a = 2 \neq 0$.

従って ψ は定値写像とホモトピックではない! ($[\psi] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ は非自明な元!)

- この議論をさらに工夫すると $[\psi] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ は位数無限の元であることもわかる.

$\boxed{宿題25}$ このことを示せ(これは手間がかかる).

従って n : even のとき $\pi_{2n-1}(S^n)$ は無限群である.

補足

ここで考えた ψ は id_{S^n} の Whitehead 積 $[id_{S^n}, id_{S^n}]$ という重要な元である.

また, ここで考えた $a \in \mathbb{Z}$ は ψ の Hopf 不変量 という重要な不変量である.

- 他の例
  - Hopf fibration

    $S^1 \subset \mathbb{C}$ はスカラー倍で $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に作用する.

    商空間 $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ を 複素射影空間 という

    $\mathbb{C}P^2 = S^2 \cup_\eta D^4$ となることが知られており,

    接着写像 $\eta : S^3 \to S^2$ は Hopf fibration と呼ばれている(後で扱う).

    $u \in H^2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ を基底とすると $u^2 \in H^4(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ は基底となることが知られている("Hopf 不変量" は 1!).

2024
都立大集中講義 4-3.

つづき

四元数体$\mathbb{H}$の場合も同様に $S^3\subset\mathbb{H}$ の $S^{4n+3}\subset\mathbb{H}^{n+1}$ への作用から
$\mathbb{H}P^n = S^{4n+3}/S^3$ が定義でき, $\mathbb{H}P^2 = S^4\cup_\xi D^8$ となり
$v\in H^4(\mathbb{H}P^2)\cong\mathbb{Z}$ を基底とすると $v^2\in H^8(\mathbb{H}P^2)\cong\mathbb{Z}$ は基底となることが知られている.

- コホモロジー作用素

位相空間の間の写像の誘導準同型と可換な作用素

$$Sq^k : H^i(X;\mathbb{F}_2)\longrightarrow H^{i+k}(X;\mathbb{F}_2)\qquad (k=1,2,\cdots)$$
$$P^k : H^i(X;\mathbb{F}_p)\longrightarrow H^{i+2(p-1)}(X;\mathbb{F}_p)\qquad (p:\text{奇素数})$$
$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

が存在する(Steenrod作用素)

各素数 p に対し位数pの元 $\alpha\in\pi_{2p}(S^3)$ が存在して
$X = S^3\cup_\alpha D^{2p+1}$ に対し
基底 $u\in H^3(X;\mathbb{F}_p)\cong\mathbb{F}_p$, $v\in H^{2p+1}(X;\mathbb{F}_p)\cong\mathbb{F}_p$ をうまくとると
$p=2$のとき $Sq^2u=v$, p:奇素数のとき $P^1u=v$ となることが知られている.
(Sq^2, P^1 で検出されるホモトピー群の元)

- 他にも一般コホモロジーのコホモロジー作用素や, 高次コホモロジー作用素など, 様々な道具とそれらで検出されるホモトピー群の元がある.

〈ファイブレーションとホモトピー長完全列〉

- Serreファイブレーション

Serre fibration
- $p: E\to B$ が Serreファイブレーション とは次をみたすこと:

homotopy lifting property

$g: I^n\to E$ と $G: I\times I^n\to B$ に対し
$\forall a\in I^n$, $p(g(a)) = G(0,a)$ となるならば
$\hat{G}: I\times I^n\to E$ が存在して
$\forall a\in I^n$, $\hat{G}(0,a)=g(a)$, $\forall a\in I^n, \forall t\in I$, $p(\hat{G}(t,a)) = G(t,a)$ となる.

$$\begin{tikzcd} \{0\}\times I^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ I\times I^n \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "\hat{G}"] & B \end{tikzcd}$$

例 - 既に見たように被覆空間はSerreファイブレーションである.
より一般にファイバー束(局所自明ファイバー空間)はSerreファイブレーションである.

- $X=(X, x_0)$: 基点付空間 のとき

$$PX = \{\, l: I\to X \mid l(0)=x_0 \,\}$$: (based) path space (コンパクト開位相で位相空間となる)

$p: PX\longrightarrow X$ ($p(l)=l(1)$.) はSerreファイブレーションとなる

$\boxed{\text{宿題 26}}$ pが連続であることと, pがSerreファイブレーションとなることを示せ.

$\Omega X := p^{-1}(x_0) = \{\, l: I\to X \mid l(0)=l(1)=x_0 \,\}$: 基点付ループ空間

2024
都立大集中講義 4-4

○ $p: E \to B$: Serre ファイブレーションのとき、任意の $b, b' \in B$ に対し
$p^{-1}(b)$ と $p^{-1}(b')$ の(コ)ホモロジー群, ホモトピー群などは同型になることが知られている.
(より強く、$p^{-1}(b)$ と $p^{-1}(b')$ の弱ホモトピー型は等しいことが知られている)
E を p の全空間, B を p の底空間, $p^{-1}(b)$ を p の b 上のファイバーと呼ぶ.

定理 (Serre ファイブレーションのホモトピー長完全列)

$p: E \to B$ を Serre ファイブレーション, $F = p^{-1}(b_0)$ ($b_0 \in B$ を基点), $i: F \hookrightarrow E$ を包含写像とするとき,
自然な準同型 $\partial_*: \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が存在して、次は完全:

$$\cdots \to \pi_{i+1}(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_1(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

ただし E と F の基点 $e_0 \in F$ は同じ点とし、
群構造のない集合の完全性は $\ker p_* = \mathrm{im}\, i_*$ などが成り立つこととする.
$\ker p_* = \{a \in \pi_0(E) \mid p_* a$ は基点を含む弧状連結成分に対応$\}$ □

$\boxed{\text{宿題27}}$ $\pi_i(E)$ での完全性を homotopy lifting property を用いて示せ.

例

- $p: E \to B$ を被覆空間とし、$F = p^{-1}(b_0)$ とする

  F の弧状連結成分は可縮なので $\pi_i(F) \cong \begin{cases} F & (i = 0) \\ * & (i \geq 1) \end{cases}$

  よってホモトピー長完全列から $\pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B)$ は単射.
  $i \geq 2$ のとき $\pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B)$ は同型となる.

  被覆空間 $p: \mathbb{R} \to S^1$ を考えると

  $\pi_i(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 1) \\ * & (i \neq 1) \end{cases}$ ← すべてのホモトピー群が計算できる珍しい例!

  他にも $p: S^n \to \mathbb{R}P^n_{(n \geq 2)}$ を考えると、$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は分かっていたので

  $\pi_i(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (i = 1) \\ \pi_i(S^n) & (i \neq 1) \end{cases}$ □

- (X, x_0): 弧状連結な基点付空間のとき
  $w_0 \in PX$ を $\forall t \in I$, $w(t) = x_0$ となる道とすると
  $f: \{w_0\} \hookrightarrow PX$ はホモトピー同値写像. つまり PX は可縮.

$\boxed{\text{宿題28}}$ $H: I \times PX \to PX$; $H(t, l)(s) = l(ts)$ は連続であることを示し、
f はホモトピー同値写像であることを示せ.

2024 都立大集中講義 4-5

つづき

これより $\forall i$, $\pi_i(PX)=*$ なので

$p: PX \to X$ のホモトピー長完全列から $\forall i$, $\pi_i(\Omega X)\cong \pi_{i+1}(X)$.

注: $i=0$ のとき全単射であることも確認できる(先の定理だけではわからない). $\square$

◦次はファイバー束を作るときに便利.

定理

X: (パラコンパクト)多様体, G: コンパクトLie群, $G \curvearrowright X$: 自由に作用する. とする.

このとき 商写像 $p: X \longrightarrow X/G$ は 主G-束(特にファイバー束)となる $\square$

例

- $S^1 < \mathbb{C}$ が $S^3 < \mathbb{C}^2$ にスカラー倍で作用するとき, $S^3/S^1 = \mathbb{C}P^1 = S^2$.

 商写像 $\eta: S^3 \to S^2$ を Hopf ファイブレーションという.

 ホモトピー長完全列を書くと

$$\cdots \to \underset{\displaystyle *}{\underset{\shortparallel}{\pi_3(S^1)}} \xrightarrow{i_*} \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\underset{\wr\shortparallel}{\pi_3(S^3)}} \xrightarrow{\eta_*} \pi_3(S^2) \xrightarrow{\partial_*}$$

$$\underset{\displaystyle *}{\underset{\shortparallel}{\pi_2(S^1)}} \xrightarrow{i_*} \underset{\displaystyle *}{\underset{\shortparallel}{\pi_2(S^3)}} \xrightarrow{\eta_*} \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\underset{\wr\shortparallel}{\pi_2(S^2)}} \xrightarrow{\partial_*} \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\underset{\wr\shortparallel}{\pi_1(S^1)}} \xrightarrow{i_*} \underset{\displaystyle *}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(S^3)}}$$

これより $\eta_*: \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2)$ は同型.

$\pi_3(S^3)\cong\mathbb{Z}$ は $[id_{S^3}]$ が基底なので $\pi_3(S^2)\cong\mathbb{Z}$ は $\eta_*[id_{S^3}]=[\eta]$ が基底!

(歴史的には おそらく最初に見つかった 非自明な高次ホモトピー群の例.)

さらに $\pi_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=1,2) \\ \pi_i(S^3) & (\text{otherwise}) \end{cases}$ となることもわかる. $\square$