目標
X : $(n-1)$-conn.
$\Rightarrow \pi_n(X) \cong H_n(X)$
特に $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$

2024
都立大集中講義 3-1

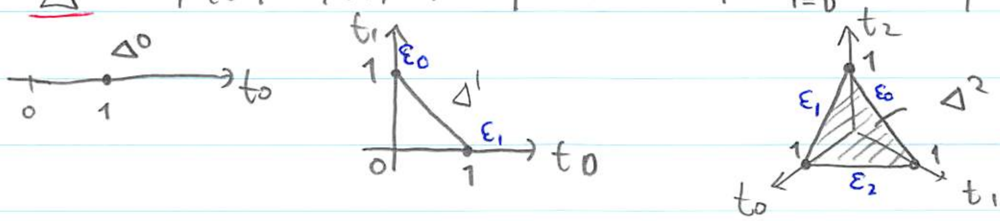
前回の補足

例　S^n $(n \geq 2)$　nに関する帰納法で $\pi_1(S^n) = *$ を示す.
　$n=2$ は示した
　$U_1, U_2 \subset S^n$ を北半球,南半球を"少しふくらませた"ものとする.
　$U_1 \cap U_2 \simeq S^{n-1}$, $U_1 \simeq *$, $U_2 \simeq *$ なので $\pi_1(S^n) = *$. //
　　　　　　　　　　　　　　　　van Kampen の定理より

- $\pi_0(X) = *$, $\pi_1(X) = *$ となるとき, Xは単連結という
　simply connected

〈ホモロジー群とホモトピー群〉

- ホモロジー群(復習)
  - $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$: 標準 n-単体.
  standard n-simplex



  - $\varepsilon_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$: i番目の面 $(n \geq 1, 0 \leq i \leq n)$
  face
  $\varepsilon_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, \overset{i}{0}, \dots, t_{n-1})$
  - X : 位相空間 のとき
  Xの特異n-単体 σ とは $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ のこと.
  singular n-simplex
  - R : 1をもつ可換環 とする.

(有限個の)特異n-単体たちの形式的な線型結合

$$c = \sum_j a_j \sigma_j \quad (a_j \in R)$$

をXのn-チェインという
n-chain

n-チェインの全体 $S_n(X;R)$ は R-加群となる

- $n < 0$ のとき $S_n(X;R) = 0$ とする. (以下 $n<0$のときはあまり触れない)
- $\partial : S_n(X;R) \to S_{n-1}(X;R)$: R-準同型 を

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i)$$

で定める

∂を境界作用素という
boundary operator

- $\partial \circ \partial : S_n(X;R) \to S_{n-2}(X;R)$ は 0 となる

$\boxed{宿題15}$ このことを示せ.

$S_*(X;R) = \{S_n(X;R), \partial\}_n$ をXのR係数特異チェイン複体という
singular chain complex with R-coefficient

2024
都立大集中講義 3-2

つづき

- 従って $\mathrm{im}\,\partial \subset \ker \partial$ となるので

$$H_n(X;R) = \frac{\ker(\partial: S_n(X;R) \to S_{n-1}(X;R))}{\mathrm{im}(\partial: S_{n+1}(X;R) \to S_n(X;R))}$$

と定義する(XのR係数n次ホモロジー群 n-th homology group with R-coefficient)

- $R=\mathbb{Z}$ のときは $\mathbb{Z}$ を略して書くことがある (e.g. $S_n(X)$, $H_n(X)$)

- 単体複体による定義もある. これらは自然に同型となる.

• ホモロジー群の性質

- P = 1点集合 とすると
$$H_i(X;R) \cong \begin{cases} R & (i=0) \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases}$$ となる.

$\boxed{\text{宿題16}}$ このことをホモロジー群の定義から示せ.

- $f: X \to Y$ に対し

$f_\#: S_n(X;R) \to S_n(Y;R)$: R-準同型 が

$f_\# \sigma = f \circ \sigma$ により定まる.

また $\partial \circ f_\# = f_\# \circ \partial$ が成り立つ☆ (チェイン写像となる) ので

$f_*: H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ が $f_*[c] = [f_\# c]$ により定まる☆☆

$f_\#, f_*$ を f の誘導準同型 induced homomorphism という

$\boxed{\text{宿題17}}$ ☆と☆☆を証明せよ.

定理 (ホモロジー群のホモトピー不変性)

$f, g: X \to Y$ に対し $f \simeq g$ ならば

$f_*, g_*: H_*(X;R) \to H_*(Y;R)$ に対し $f_* = g_*$ が成り立つ□.

系

$X \simeq Y$ ならば $H_*(X;R) \cong H_*(Y;R)$ □

- R-加群とR-準同型の列

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots \quad (*)$$

が M_iで完全 exact at M_i とは $\ker f_i = \mathrm{im}\, f_{i-1}$ となること

$\forall i$, M_iで完全であるとき, (*)は完全列 exact sequence という

例

$0 \to M \xrightarrow{f} N$ が Mで完全 $\Leftrightarrow$ fは単射

$M \xrightarrow{f} N \to 0$ が Nで完全 $\Leftrightarrow$ fは全射

$0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ が MとNで完全 $\Leftrightarrow$ fは同型写像

$0 \to M \to 0$ が Mで完全 $\Leftrightarrow$ $M=0$ □

2024
都立大集中講義 3-3

定理 (Mayer-Vietoris exact sequence) (係数Rは略す)

X: 位相空間, $U_1, U_2 \subset X$: 開集合, $U_1 \cup U_2 = X$ のとき

$I : H_n(U_1 \cap U_2) \to H_n(U_1) \oplus H_n(U_2)$: $I(a) = (i_{1*}a, -i_{2*}(a))$

$J : H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) \to H_n(X)$: $J(a_1, a_2) = j_{1*}a_1 + j_{2*}a_2$

$\exists \Delta : H_{n+1}(X) \to H_n(U_1 \cap U_2)$ からなる次の列は完全:

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_n(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{I} H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) \xrightarrow{J} H_n(X) \to \cdots$$

ただし i_1, i_2, j_1, j_2 は包含写像. □

例

$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ $(n \geq 1)$に対し

$U_1 = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -1\}$

$U_2 = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < 1\}$ の Mayer-Vietoris 完全列を考えると,

$$H_q(S^n; R) \cong \begin{cases} R & (q = 0 \text{ or } n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$ がわかる.

(U_1, U_2 は可縮, $U_1 \cap U_2 \simeq S^{n-1}$ となることを使う)

$\boxed{\text{宿題18}}$ 実際に Mayer-Vietoris 完全列を用いて $H_*(S^n)$ を求めよ.

注. $A, B \subset X$: 開集合, $A \cap B = \phi$, $A \cup B = X$ のとき

$H_*(X; R) \cong H_*(A; R) \oplus H_*(B; R)$.

$\boxed{\text{宿題19}}$ このことを示せ.

- Hurewicz 準同型
  - $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の基底 $[S^n]$ を固定する. (以下 係数の$\mathbb{Z}$は略す)

    $[\phi] \in \pi_n(X)$ に対し $hur[\phi] = \phi_*[S^n] \in H_n(X)$ が定まる.

    写像 $hur : \pi_n(X) \to H_n(X)$ は準同型であることが確認できる.

    hur を Hurewicz 準同型 という

定理 (Hurewicz の同型定理)

X: 弧状連結な空間とすると, 次が成り立つ

(i) $hur : \pi_1(X) \to H_1(X)$ は全射で, $\ker(hur) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

(つまり $\pi_1(X)$ のアーベル化 $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ は $H_1(X)$ と同型).

(ii) $n \geq 2$, $\pi_i(X) = *$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ のとき

$hur : \pi_n(X) \to H_n(X)$ は同型 □

2024
都立大集中講義 3-4

$\boxed{X\text{は}1\text{-連結} \Longleftrightarrow X\text{は単連結}}$

定義

$\pi_i(X)=*$ $(i=0,1,\dots,n)$ のとき Xは n-連結 という。□

n-connected.

系

Xが$(n-1)$-連結$(n\geq 2)$ のとき, $H_0(X)\cong\mathbb{Z}$, $H_i(X)=*$ $(i=1,\dots,n-1)$, $\pi_n(X)\cong H_n(X)$ □

例

S^n $(n\geq 2)$ は $(n-1)$-連結で $\pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$.

∵ S^n は単連結なので $\pi_2(S^n)\cong H_2(S^n)$

$n=2$のとき $\pi_2(S^2)\cong\mathbb{Z}$ 　 $n\geq 3$ のとき $\pi_2(S^n)=*$.

$n\geq 3$ のとき $\pi_3(S^n)\cong H_n(S^n)$ 　これをくり返す //

。この例のように, 次数が低いところから始めて
最初に非自明になるホモトピー群は ホモロジー群 によって計算できる!

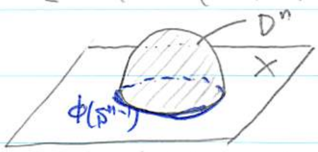
ホモトピー群よりは計算しやすいことが多い.

⟶ より高い次数では?

• セルの貼り付け (より高い次数の非自明な元を見つける)

$\phi: S^{n-1}\to X$ を用いて空間 $Y=X\sqcup D^n/\sim$ を次で生成される同値関係の商として定める:

$$\forall z\in S^{n-1}(\subset D^n),\quad \phi(z)\sim z.$$

$Y=$ 

Yを Xに ϕで n-セルを貼った空間 という (ϕをこのn-セルの接着写像という)

$Y=X\cup_\phi D^n$ と書く.

。$\phi\simeq\phi': S^{n-1}\to X$ ならば $X\cup_\phi D^n\simeq X\cup_{\phi'}D^n$ となることが知られている.

$\boxed{\text{宿題}20}$ このことを示せ.

⟶ ϕが定値写像とホモトピックなら $X\cup_\phi D^n\simeq X\vee S^n$ となる.

Mayer-Vietoris から
$$H_i(X\vee S^n)\cong\begin{cases} H_i(X) & (i\neq n)\\ H_n(X)\oplus\underbrace{H_n(S^n)}_{\cong\,\mathbb{Z}} & (i=n)\end{cases}$$
である.

$\boxed{\text{宿題}21}$ $H_*(X\vee S^n)$ がこのようになることを示せ.

⟶ $H_*(X\cup_\phi D^n)$ が このような形になっていなければ ϕは $\pi_{n-1}(X)$の非自明な元!

このアイデアはホモロジーよりもコホモロジーでうまく機能する. コホモロジーも思い出してみよう.

2024
都立大集中講義 3-5

• コホモロジー群

。 $S^n(X;R) = \mathrm{Hom}_R(S_n(X;R), R)$ (R-準同型 $S_n(X;R)\to R$ の全体) とし

$$\begin{array}{ccc} \delta: S^n(X;R) & \longrightarrow & S^{n+1}(X;R) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ u & \longmapsto & u\circ\partial \end{array}$$

とおくと $\delta^2=0$ となる.

$S^*(X;R)=\{S^n(X;R),\delta\}$ はコチェイン複体となる.

$H^n(X;R) = \ker(\delta: S^n(X;R)\to S^{n+1}(X;R)) / \mathrm{im}(\delta: S^{n-1}(X;R)\to S^n(X;R))$

: X の R-係数 n 次コホモロジー

。 $f: X\to Y$ に対し $f^\#: S^n(Y;R)\to S^n(X;R)$ ← 向きが逆になる注意.

が $f^\# u = u\circ f$ で定まり, $f^\#\circ\delta=\delta\circ f^\#$ が成り立つ

⇝ $f^*: H^n(Y;R)\to H^n(X;R)$: 誘導準同型

。 ホモトピー不変性や Mayer-Vietoris 完全列はコホモロジーでも成り立つ

宿題22 コホモロジー群の Mayer-Vietoris 完全列の主張を書き下せ. (証明は不要)

• カップ積

。 コホモロジー群には カップ積 $\cup: H^i(X;R)\otimes_R H^j(X;R)\to H^{i+j}(X;R)$ という積構造がある.

- カップ積は双線型: $(a\alpha+b\beta)\cup(a'\alpha'+b'\beta')$
$= aa'\alpha\cup\alpha' + ab'\alpha\cup\beta' + ba'\beta\cup\alpha' + bb'\beta\cup\beta'$
- "次数付可換": $\alpha\in H^i(X;R)$, $\beta\in H^j(X;R)$ に対し $\alpha\cup\beta = (-1)^{ij}\beta\cup\alpha$.
- $1\in H^0(X;R)$ をもつ: $\forall\alpha\in H^i(X;R)$, $1\cup\alpha=\alpha\cup 1=\alpha$.
- $f: X\to Y$ に対し $f^*(\alpha\cup\beta) = (f^*\alpha)\cup(f^*\beta)$ (カップ積を保つ)

• Künneth の定理

定理 (Künneth の定理)

$H^*(X;R)$ または $H^*(Y;R)$ のいずれかがすべての次数で自由加群のとき,

自然な同型 $H^n(X\times Y;R)\cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X;R)\otimes_R H^j(Y;R)$ が存在する. $\cdots(*)$

さらに, この同型は積を保つ □

。(*)の同型で $\alpha\otimes\beta$ に対応する元を $\alpha\times\beta\in H^{i+j}(X\times Y;R)$ と書く (クロス積)

。(*)の右辺には $\alpha\in H^i(X;R)$, $\alpha'\in H^{i'}(X;R)$, $\beta\in H^j(Y;R)$, $\beta'\in H^{j'}(Y;R)$ に対し

$(\alpha\otimes\beta)\cdot(\alpha'\otimes\beta') = (-1)^{i'j}(\alpha\cup\alpha')\otimes(\beta\cup\beta')$ という積を定める.

"ここを入れ替えた分の符号"が出る.

例
$$H^i(S^n\times S^n;R) \cong \begin{cases} R\{1\} & (i=0) \\ R\{u\times 1, 1\times u\} & (i=n) \\ R\{u\times u\} & (i=2n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ただし $u\in H^n(S^n;R)\cong R$ は基底.
$(u\times 1)\cup(1\times u) = u\times u$. //

明日につづく.