2019 年度幾何学 II　演習問題 13　　2020 年 1 月 22 日

今回は n 次元球面 S^n のホモロジー群を求める．S^n は以下で定義される抽象単体複体 K_{n+1} の幾何学的実現と同相になることが知られている．したがって，K_{n+1} のホモロジー群を計算すればよい（K_1, K_2 と同型な単体複体はこれまでに何度か扱った）．

$n \geq 1$ のとき，頂点集合 $[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ 上の抽象単体複体 K_n を次で定義する．

$$K_n = \{\sigma \subset [n] \mid \sigma \neq \emptyset, [n]\}.$$

部分複体 $L_n \subset K_n$ を次で定義する．

$$L_n = K_n \setminus \{\{0, 1, \ldots, n-1\}\}.$$

L_n は K_{n-1} の錐 (cone) と同型になることが確認できる．したがってホモロジー群は 1 点集合のホモロジー群と同型（演習問題 9 問 3）．つまり次のようになる．

$$\dim H_p(L_n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

$[n]$ 上の抽象単体複体 M_n を次で定義しておく．

$$M_n = \{\sigma \subset [n] \mid \sigma \neq \emptyset\}$$

M_n の幾何学的実現は n-次元単体 Δ^n と同相である．また，M_0 は 1 点集合であり，$n \geq 1$ のとき M_n は M_{n-1} の錐と同型なので，M_n もまた 1 点集合のホモロジー群を持つ．

$$\dim H_p(M_n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

問 1. K_n $(n \geq 3)$ のホモロジー群の次元が次のようになることを示せ．ただし，$n = 2$ のときに同様のことが成り立つことは用いてもよい（演習問題 7 例）．

$$\dim H_p(K_n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & p = 0, n-1 \\ 0 & p \neq 0, n-1 \end{cases}$$

方針の例 : n に関する帰納法を行う．$L_n \cup M_{n-1} = K_n$，$L_n \cap M_{n-1} = K_{n-1}$ となることを確認し，Mayer–Vietoris 完全列を使う．証明が複雑になるかもしれないが，ホモロジー群の定義から直接確認することもできる．

問 2. （★）$n \geq 1$ のとき，ふたつの n 次元球面 S_1 と S_2 の点 $x_1 \in S_1$ および $x_2 \in S_2$ を同一視して得られる空間 X のホモロジー群 $H_p(X; \mathbb{Q})$ の次元をすべて求めよ．