2019 年度幾何学 II　演習問題 12　　2020 年 1 月 8 日

頂点集合 $[n+1]=\{0,1,2,\ldots,n,n+1\}$ 上の抽象単体複体 K_n を次で定義する．

$$K_n=\{\{i\}\mid i\in[n+1]\}\cup\{\{i,j\}\mid i,j\in[n+1],\ j-i=1\text{ or }2\}.$$

また，部分複体 $L_n\subset K_n$ を次で定義する．

$$L_n=\{\{n-1\},\{n\},\{n+1\},\{n-1,n\},\{n-1,n+1\},\{n,n+1\}\}$$

次が成り立つことに注意．

- $$\dim H_p(K_0;\mathbb{Q})=\begin{cases}1 & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p=1.\end{cases}\qquad \dim H_p(K_1;\mathbb{Q})=\begin{cases}1 & \text{for } p=0,\\ 1 & \text{for } p=1.\end{cases}$$
- 同型な抽象単体複体のホモロジー群は同型．
- 任意の $n\geq 0$ に対し，$\dim H_0(K_n;\mathbb{Q})=1$（$K_n$ は連結なので）．

問 1. $n\geq 2$ のとき，$\dim H_1(K_n;\mathbb{Q})=n$ となることを，上に記した事実を用いて示せ．以下に解法の例を示すが，ほかの方法を用いてもよい．

(1) $K_n\cup L_{n+1}=K_{n+1}$ となることを見る．

(2) $K_n\cap L_{n+1}=\{$ 辺単体たち $\}$ の形で書き下し，それが線分に対応する抽象単体複体，つまり K_0 と同型となることを見る．

(3) L_n と K_1 が同型であることを見る．

(4) Mayer–Vietoris 完全列を書き，完全性を用いてそれぞれの写像の kernel の次元と rank を求める．

(5) 得られた次元と次元公式を用いて $\dim H_1(K_{n+1};\mathbb{Q})$ を求める．

問 2. （★）$H_1(K_n;\mathbb{Q})$ の基底を [辺単体の線型結合] の形で与えよ（ヒント：問 1 の解と同時に得られるはず．写像 β の値を見よ）．