2019 年度幾何学 II　演習問題 11　　2019 年 12 月 25 日

K を頂点集合 V 上の抽象単体複体とし，部分複体 $K_1, K_2 \subset K$ で $K_1 \cup K_2 = K$ となるものをとる．このとき，次の R-準同型写像が定義される．

$$\begin{aligned}
&\alpha_*\colon H_p(K_{12};R) \to H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R), && \alpha_*(u) = ((i_1)_*(u), -(i_2)_*(u)),\\
&\beta_*\colon H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R) \to H_p(K;R), && \beta(u_1,u_2) = (j_1)_*(u_1) + (j_2)_*(u_2).
\end{aligned}$$

ただし，$i_1\colon K_{12} \to K_1$，$i_2\colon K_{12} \to K_2$，$j_1\colon K_1 \to K$，$j_2\colon K_2 \to K$ は包含写像．

さらに，R-準同型写像

$$\Delta\colon H_p(K;R) \to H_{p-1}(K_{12};R)$$

が以下の手順で与えられる（次数がずれていることに注意！）．

(1) $[z] \in H_p(K;R)$ をとる．

(2) $\beta\colon C_p(K_1;R) \oplus C_p(K_2;R) \to C_p(K;R)$ は全射なので，$\beta(c_1,c_2) = z$ なる $c_1 \in C_p(K_1;R)$ と $c_2 \in C_p(K_2;R)$ が存在する（c_i は $\partial_p c_i = 0$ をみたすとは限らないのでホモロジー類を代表するとは限らないことに注意）．このような (c_1,c_2) を任意に取る（取り方は一意ではない）．

(3)

$$\begin{aligned}
\beta(\partial_p c_1, \partial_p c_2) &= (j_1)_\sharp(\partial_p c_1) - (j_2)_\sharp(\partial_p c_2)\\
&= \partial_p (j_1)_\sharp(c_1) - \partial_p (j_2)_\sharp(c_2)\\
&= \partial_p \beta(c_1,c_2) = \partial_p z = 0
\end{aligned}$$

なので $(\partial_p c_1, \partial_p c_2) \in \ker\beta = \alpha(C_{p-1}(K_{12};R))$ となる．これより $\alpha(y) = ((i_1)_\sharp(y), -(i_2)_\sharp(y)) = (\partial_p c_1, \partial_p c_2)$ なる $y \in C_{p-1}(K_{12};R)$ が存在する．

(4)

$$\begin{aligned}
\alpha(\partial_{p-1} y) &= ((i_1)_\sharp(\partial_{p-1} y), -(i_2)_\sharp(\partial_{p-1} y))\\
&= (\partial_{p-1}(i_1)_\sharp(y), -\partial_{p-1}(i_2)_\sharp(y))\\
&= (\partial_{p-1}\partial_p c_1, -\partial_{p-1}\partial_p c_2) = (0,0)
\end{aligned}$$

と α が単射であることから，$\partial_{p-1} y = 0$．

(5) $\Delta([z]) = [y]$ と定める．

この Δ の定め方は，$[z]$ の代表の取り方や c_1, c_2 の取り方に依存しているように見えるが，ホモロジー類 $[z]$ のみに依存している（well-defined）ことが確認できる（演習問題 10 問 3）．

すると次のような R-準同型写像の列が得られる．

$$\cdots \to H_p(K_{12};R) \xrightarrow{\alpha_*} H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R) \xrightarrow{\beta_*} H_p(K;R) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(K_{12};R) \to \cdots$$

この列は完全列となることが知られている．これを **Mayer–Vietoris 完全列**という．「完全列となる」とは各 p で次が成り立つこと．

$$\ker\alpha_* = \Delta(H_p(K;R)),\quad \ker\beta_* = \alpha_*(H_p(K_{12};R)),\quad \ker\Delta = \beta_*(H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R)).$$

問 1. 次で与えられる頂点集合 $[2]=\{0,1,2\}$ 上の単体複体 K（幾何学的実現は三角形の周となる）を考える．

$$K=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}.$$

これの部分複体 I, L を次で定める．

$$I=\{\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\quad L=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,2\},\{1,2\}\}.$$

すると，$\mathbb{Z}$-係数ホモロジー群は次のようになる（$H_p(K)=H_p(K;\mathbb{Z})$ などと略記する）．

$$H_p(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle 0\rangle] & \text{for } p=0,\\ \mathbb{Z}[\langle 0,1\rangle-\langle 0,2\rangle+\langle 1,2\rangle] & \text{for } p=1.\end{cases}$$

$$H_p(I)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle 0\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p=1.\end{cases}$$

$$H_p(L)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle 0\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p=1.\end{cases}$$

$$H_p(I\cap L)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle 0\rangle]\oplus\mathbb{Z}[\langle 1\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p=1.\end{cases}$$

このとき，Mayer–Vietoris 完全列

$$0\to H_1(K)\xrightarrow{\Delta} H_0(I\cap L)\xrightarrow{\alpha_*} H_0(I)\oplus H_0(L)\xrightarrow{\beta_*} H_0(K)\to 0$$

における $\Delta([\langle 0,1\rangle-\langle 0,2\rangle+\langle 1,2\rangle])\in H_0(I\cap L)$ を求めよ（ヒント：表の定義通りに計算すればよい）．

問 2. （★）Mayer–Vietoris 完全列が実際に完全列となっていることを証明せよ．