2019 年度幾何学 II　演習問題 10　　2019 年 12 月 18 日

K を頂点集合 V 上の抽象単体複体とする．部分集合 $K' \subset K$ が**部分複体** (subcomplex) であるとは，K' がある部分集合 $V' \subset V$ 上の抽象単体複体となっていること．このとき，包含写像 $V' \to V$ は単体写像 $K' \to K$ を与える．

$K_1 \subset K$ を頂点集合が $V_1 \subset V$ である部分単体複体，$K_2 \subset K$ を頂点集合が $V_2 \subset V$ である部分複体ととする．すると，$K_{12} = K_1 \cap K_2$ は頂点集合が $V_{12} = V_1 \cap V_2$ である部分複体となる．さらに $K = K_1 \cup K_2$ と仮定する．このとき，次の R-準同型が定義される．

$$\alpha\colon C_p(K_{12}; R) \to C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R), \quad \alpha(c) = ((i_1)_\sharp(c), -(i_2)_\sharp(c)).$$

ただし，$i_1\colon K_{12} \to K_1$，$i_2\colon K_{12} \to K_2$ は包含写像．

$$\beta\colon C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R) \to C_p(K; R), \quad \beta(c_1, c_2) = (j_1)_\sharp(c_1) + (j_2)_\sharp(c_2).$$

ただし，$j_1\colon K_1 \to K$，$j_2\colon K_2 \to K$ は包含写像．

これらはホモロジー群の間の準同型写像を誘導することが確認できる．

$$\begin{aligned} &\alpha_*\colon H_p(K_{12}; R) \to H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R), && \alpha_*(u) = ((i_1)_*(u), -(i_2)_*(u)), \\ &\beta_*\colon H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R) \to H_p(K; R), && \beta(u_1, u_2) = (j_1)_*(u_1) + (j_2)_*(u_2). \end{aligned}$$

このとき，次の R-準同型写像の列は**完全**となる．

$$0 \to C_p(K_{12}; R) \xrightarrow{\alpha} C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R) \xrightarrow{\beta} C_p(K; R) \to 0$$

つまり，α は単射，$\ker \beta = \alpha(C_p(K_{12}; R))$，$\beta$ は全射．

問 1. 上のように K_1，K_2 をとると $K_{12} = K_1 \cap K_2$ は実際に $V_{12} = V_1 \cap V_2$ 上の抽象単体複体となっていることを示せ．つまり，次を確認せよ．

(1) $\emptyset \notin K_{12}$.

(2) 任意の $v \in V_{12}$ に対し，$\{v\} \in K_{12}$.

(3) $\sigma \in K_{12}$，$\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ ならば，$\tau \in K_{12}$.

問 2.

$$0 \to C_p(K_{12}; R) \xrightarrow{\alpha} C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R) \xrightarrow{\beta} C_p(K; R) \to 0$$

実際に α は単射，$\ker \beta = \alpha(C_p(K_{12}; R))$，$\beta$ は全射となっていることを確認せよ．(ヒント：任意の $c \in C_p(K; R)$ は $c = \sum_\sigma a_\sigma \sigma$ と書けることを使う．ただし σ は K の p-辺単体全体を走るものとする．また，R-準同型 f が単射となることと $\ker f = 0$ となることが同値であることにも注意.)

表と同じ抽象単体複体 K, K_1, K_2, K_{12} をとる．このとき，R-準同型写像

$$\Delta\colon H_p(K;R) \to H_{p-1}(K_{12};R)$$

が以下の手順で与えられる（次数がずれていることに注意！）．

(1) $[z] \in H_p(K;R)$ をとる．

(2) $\beta\colon C_p(K_1;R) \oplus C_p(K_2;R) \to C_p(K;R)$ は全射なので，$\beta(c_1, c_2) = z$ なる $c_1 \in C_p(K_1;R)$ と $c_2 \in C_p(K_2;R)$ が存在する（c_i は $\partial_p c_i = 0$ をみたすとは限らないのでホモロジー類を代表するとは限らないことに注意）．このような (c_1, c_2) を任意に取る（取り方は一意ではない）．

(3)

$$\begin{aligned}
\beta(\partial_p c_1, \partial_p c_2) &= (j_1)_\sharp(\partial_p c_1) - (j_2)_\sharp(\partial_p c_2) \\
&= \partial_p (j_1)_\sharp(c_1) - \partial_p (j_2)_\sharp(c_2) \\
&= \partial_p \beta(c_1, c_2) = \partial_p z = 0
\end{aligned}$$

なので $(\partial_p c_1, \partial_p c_2) \in \ker\beta = \alpha(C_{p-1}(K_{12};R))$ となる．これより $\alpha(y) = ((i_1)_\sharp(y), -(i_2)_\sharp(y)) = (\partial_p c_1, \partial_p c_2)$ なる $y \in C_{p-1}(K_{12};R)$ が存在する．

(4)

$$\begin{aligned}
\alpha(\partial_{p-1} y) &= ((i_1)_\sharp(\partial_{p-1} y), -(i_2)_\sharp(\partial_{p-1} y)) \\
&= (\partial_{p-1}(i_1)_\sharp(y), -\partial_{p-1}(i_2)_\sharp(y)) \\
&= (\partial_{p-1}\partial_p c_1, -\partial_{p-1}\partial_p c_2) = (0, 0)
\end{aligned}$$

と α が単射であることから，$\partial_{p-1} y = 0$．

(5) $\Delta([z]) = [y]$ と定める．

すると次のような R-準同型写像の列が得られる．

$$\cdots \to H_p(K_{12};R) \xrightarrow{\alpha_*} H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R) \xrightarrow{\beta_*} H_p(K;R) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(K_{12};R) \to \cdots$$

この列は**完全列**となることが知られている．これを **Mayer–Vietoris 完全列**という．一般に単体複体が大きくなるとホモロジー群を手計算するのが大変になるが（∂_p を表す巨大な行列に掃き出し法をしないといけない），Mayer–Vietoris 完全列を使えば計算が容易になることも多い．

問 3.（★）$\Delta\colon H_p(K;R) \to H_{p-1}(K_{12};R)$ が well-defined であることを確認せよ．つまり，$[z] = [z']$ なる任意の z' に対して任意に $\beta(c'_1, c'_2) = z'$ なる (c'_1, c'_2) をとり，$\alpha(y') = (\partial_p c_1, \partial_p c_2)$ なる y' をとったとき，$H_{p-1}(K_{12};R)$ の元として $[y] = [y']$ となることを示せ．