2019 年度幾何学 II　演習問題 9　　2019 年 12 月 11 日

問 1. 半順序集合 X, Y に対し，直積集合 $X \times Y$ の順序（直積順序）は

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x' \text{ かつ } y \leq y'$$

で定義される．これが実際に順序の公理を満たしていることを確認せよ．

非負整数 m に対し，半順序集合 $[m] = \{0 < 1 < \cdots < m\}$ を考える．K, L をそれぞれ頂点集合 $[m], [n]$ 上の抽象単体複体とする．直積集合 $[m] \times [n]$ 上の抽象単体複体 $K \times L$ を次で定義する：

$\sigma \subset [m] \times [n]$ が辺単体であるとは，σ は空ではない全順序部分集合であり，射影 $[m] \times [n] \to [m]$ および $[m] \times [n] \to [n]$ による σ の像がそれぞれ K, L の辺単体となっていること．

$K \times L$ の幾何学的実現（対応する（単体）複体のこと）は K と L それぞれの幾何学的実現の直積に同相になることが知られている．

例. 頂点集合 $[1] = \{0, 1\}$ 上の抽象単体複体 $I = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ を考える．このとき，直積集合 $[1] \times [1]$ 上の抽象単体複体 $I^2 = I \times I$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} I^2 = \{&\{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \\ &\{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \\ &\{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\}\} \end{aligned}$$

I^2 の幾何学的実現は正方形 $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ と同相.

問 2. I^2 の $\mathbb{Q}$-係数ホモロジー群の次元をすべて求めよ．以下に方針の例を示すが，それ以外の方法をつかってもよい.

(1) 境界準同型 $\partial_1 \colon C_1(I^2; \mathbb{Q}) \to C_0(I^2; \mathbb{Q})$ と $\partial_2 \colon C_2(I^2; \mathbb{Q}) \to C_1(I^2; \mathbb{Q})$ の辺単体を基底としてとった時の行列表示（表現行列）を求める.

(2) これらの行列の rank を求め，次元公式から kernel の次元を求める.

(3) $H_1(I^2; \mathbb{Q}) = \ker \partial_1 / \partial_2(C_2(I^2; \mathbb{Q}))$ と商ベクトル空間の次元に関する公式 $\dim V/W = \dim V - \dim W$ を使って $\dim H_1(I^2; \mathbb{Q})$ を求める．H_0 と H_2 についても上で求めた次元から求めることができる.

$[m], [n]$ 上の抽象単体複体 K, L の間の単体写像 $f, g\colon K \to L$ に対し，単体写像 $F\colon K \times I \to L$ が f から g への**ホモトピー**であるとは，任意の $v \in [m]$ に対し，$F(v, 0) = f(v), F(v, 1) = g(v)$ となること．このようなホモトピーが存在するとき f は g にホモトピックであるという．

- 単体写像のホモトピーは幾何学的実現の間の連続写像のホモトピーを与える．
- ホモトピックな単体写像がホモロジー群に誘導する写像は等しい（テキストでの誘導準同型のホモトピー不変性の証明の議論を使って示すことができる）．

問 3. （★）頂点集合 $[m]$ 上の抽象単体複体 K に対し，$[m] \cup \{\infty\}$ 上の抽象単体複体 CK を

$$CK = K \cup \{\infty\} \cup \{\sigma \cup \{\infty\} \mid \sigma \in K\}$$

で定める．CK を K の錐 (cone) という．

(1) 恒等写像 $f\colon CK \to CK$ から ∞ に値をとる定値写像 $g\colon CK \to CK$ へのホモトピーを与えよ．

(2) R を 1 をもつ可換環，$P = \{\{\infty\}\}$ とするとき，包含写像 $h\colon P \to CK$ は R-係数ホモロジー群の同型写像を誘導することを示せ．ただし，上のホモトピックな単体写像に関する事実と，一般の合成可能な単体写像 α, β のホモロジー群への誘導準同型について $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$ となることは用いてよい．