2019 年度幾何学 II　演習問題 8　　2019 年 12 月 4 日

R を 1 をもつ可換環とする．抽象単体複体の間の単体写像 $f\colon K \to L$ は，次で定まる R-準同型写像 $f_\sharp\colon C_p(K;R) \to C_p(L;R)$ を誘導する．

$$(f_\sharp)_p\Bigl(\sum_{\sigma\in K\colon\, p\text{-辺単体}} n_\sigma \sigma\Bigr) = \sum_{\sigma\in K\colon\, p\text{-辺単体}} n_\sigma f(\sigma)$$

この準同型写像は境界準同型と可換，つまり次が成り立つ．

$$\partial_p \circ (f_\sharp)_p = (f_\sharp)_{p-1} \circ \partial_p.$$

このことを使うと，ホモロジー群の間の R-準同型写像

$$(f_*)_p\colon H_p(K;R) \to H_p(L;R)$$

を誘導することが確認できる（証明はテキストを参照）．

問 1. 頂点集合 $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ 上の抽象単体複体

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$$

を考える．このとき，$[\langle v_0\rangle], [\langle v_1\rangle], [\langle v_2\rangle] \in H_0(K;\mathbb{Q})$ なるホモロジー類が定まるが，$[\langle v_0\rangle] = [\langle v_1\rangle] = [\langle v_2\rangle]$ となることを示せ．

問 2. 前問の結果から $[\langle v_0\rangle] \in H_0(K;\mathbb{Q})$ は基底であることがわかる．

$$L = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$$

とおくと，$H_0(L;\mathbb{Q})$ は $[\langle v_0\rangle], [\langle v_1\rangle], [\langle v_2\rangle]$ が基底であるような 3 次元の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間である．このとき，この基底に関する $\mathbb{Q}$-線型写像

$$(f_*)_0\colon H_0(L;\mathbb{Q}) \to H_0(K;\mathbb{Q})$$

の行列表示（表現行列）を求めよ．

問 3. （★）$V = \{v_0, v_1, v_2\}$, $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ とし，三角形の周

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\}\}$$

と六角形の周

$$L = \{\{w_0\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_4\}, \{w_5\}, \{w_0, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \{w_4, w_5\}, \{w_5, w_0\}\}$$

を考える．このとき写像 $f\colon W \to V$ を

$$f(w_0) = f(w_3) = v_0, \quad f(w_1) = f(w_4) = v_1, \quad f(w_2) = f(w_5) = v_2$$

で定める．

(1) $[\langle v_0, v_1\rangle + \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_0\rangle] \in H_1(K;\mathbb{Q})$ および $[\langle w_0, w_1\rangle + \langle w_1, w_2\rangle + \langle w_2, w_3\rangle + \langle w_3, w_4\rangle + \langle w_4, w_5\rangle + \langle w_5, w_0\rangle] \in H_1(L;\mathbb{Q})$ はそれぞれ基底であることを示せ．

(2) 上の基底に関する $(f_*)_1\colon H_1(L;\mathbb{Q}) \to H_1(K;\mathbb{Q})$ の行列表示（表現行列）を求めよ．