2019 年度幾何学 II　演習問題 7　　2019 年 11 月 27 日

K を抽象単体複体とする．向きづけられた p-辺単体で生成される自由アーベル群 $C_p(K)$ を考え，

$$\partial_p\langle v_0,\dots,v_p\rangle = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\langle v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_p\rangle$$

で定まる準同型 $\partial_p\colon C_p(K)\to C_{p-1}(K)$ を定める．ただし，$\langle v_0,\dots,v_p\rangle$ はこの順で向きづけられた辺単体を表し，$\{0,\dots,p\}$ の置換 s について次が成り立つ．

$$\langle v_{s(0)},\dots,v_{s(p)}\rangle = (\operatorname{sgn} s)\langle v_0,\dots,v_p\rangle$$

このとき，$C_*(K)=\bigoplus_{p\geq 0}C_p(K)$ とおき，対 $(C_*(K),\partial_*)$ を K の**鎖複体（またはチェイン複体）**という．包含関係

$$\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))\subset \ker\partial_p\subset C_p(K)$$

に注意すると，K の p 次**ホモロジー群** $H_p(K)$ が次で定義される．

$$H_p(K)=\ker\partial_p/\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$$

なお，$p=0$ については $\ker\partial_0=C_0(K)$ とする．ホモロジー群の元のことを**ホモロジー類**といい，各ホモロジー類を代表 $c\in\ker\partial_p$ を用いて $[c]$ と表すことがある．

問 1. $V=\{v\}$ 上の単体複体 $K=\{\{v\}\}$ のホモロジー群が次のようになることを示せ．

$$H_p(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle v\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p\geq 1.\end{cases}$$

問 2. $V=\{v_0,v_1\}$ 上の単体複体 $K=\{\{v_0\},\{v_1\},\{v_0,v_1\}\}$（線分）のホモロジー群が次のようになることを示せ．

$$H_p(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle v_0\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p\geq 1.\end{cases}$$

問 3.（★）$V=\{v_0,v_1,v_2\}$ 上の単体複体 $K=\{\{v_0\},\{v_1\},\{v_2\},\{v_0,v_1\},\{v_0,v_2\},\{v_1,v_2\},\{v_0,v_1,v_2\}\}$（三角形の周とその内部）のホモロジー群が次のようになることを示せ．

$$H_p(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}[\langle v_0\rangle] & \text{for } p=0,\\ 0 & \text{for } p\geq 1.\end{cases}$$

例. 三角形の周のホモロジー群を計算する．$V = \{v_0, v_1, v_2\}$ 上の抽象単体複体

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$$

を考えると，K のチェイン複体は次のようになる．

$$C_0(K) = \mathbb{Z}\langle v_0\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_2\rangle, \quad C_1(K) = \mathbb{Z}\langle v_0, v_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_0, v_2\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_0, v_2\rangle, \quad C_p(K) = 0 \quad \text{for } p \geq 2.$$

また，基底に対する ∂_1 は次のように計算される．

$$\partial_1\langle v_0, v_1\rangle = \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \quad \partial_1\langle v_0, v_2\rangle = \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle, \quad \partial_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle.$$

まず $\partial_1(C_1(K))$ を決定する．

$$\langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle = (\langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle) - (\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle)$$

なので，$\partial_1(C_1(K))$ は $\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ で生成される．さらに $\partial_1(C_1(K))$ が $C_0(K)$ の「直和因子」であることを見ておく．これに $\langle v_0\rangle$ を加えた $\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ は $C_0(K)$ の基底であることが次のようにしてわかる．実際，次のようにして $C_0(K)$ を生成していることがわかる：

$$\langle v_1\rangle = (\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle) + \langle v_0\rangle, \quad \langle v_2\rangle = (\langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle) + \langle v_0\rangle.$$

$C_0(K)$ は階数 3 の自由アーベル群なので，3 個の元からなる生成系は一次独立でなければならない．

まず $H_0(K)$ を決定する．$\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ が $C_0(K)$ を生成することと，$\partial_1(C_1(K))$ は $\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ を含むことから，$H_0(K)$ は $[\langle v_0\rangle]$ で生成される．さらに $n[\langle v_0\rangle] = 0$ と仮定すると，$\partial_1(C_1(K))$ は $\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ で生成されるので，

$$n\langle v_0\rangle = a(\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle) + b(\langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle)$$

なる $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在する．ここで $\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle$ は一次独立なので，$n = a = b = 0$ でなければならない．すなわち，$[\langle v_0\rangle]$ は $H_0(K)$ の基底となる．

次に $H_1(K) = \ker\partial_1/0 \cong \ker\partial_1$ を決定する．$\partial_1(a\langle v_0, v_1\rangle + b\langle v_0, v_2\rangle + c\langle v_1, v_2\rangle) = 0$ と仮定する．左辺を計算すると次のようになる．

$$(-a-b)\langle v_0\rangle + (a-c)\langle v_1\rangle + (b+c)\langle v_2\rangle = 0$$

ここで $\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle$ は一次独立なので，$-a-b = a-c = b+c = 0$．この連立方程式の解は $a = -b = c$ となる．したがって，$\ker\partial_1$ は $[\langle v_0, v_1\rangle - \langle v_0, v_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle]$ を基底とする自由アーベル群．

以上から $H_p(K)$ は次のようになる．

$$H_p(K) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\langle v_0\rangle] & \text{for } p = 0, \\ \mathbb{Z}[\langle v_0, v_1\rangle - \langle v_0, v_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle] & \text{for } p = 1, \\ 0 & \text{for } p \geq 2. \end{cases}$$