2019 年度幾何学 II　演習問題 6　　2019 年 11 月 20 日

幾何学的な（単体）複体は以下のようにして頂点と辺（や面）の関係だけを取り出すことができる．

有限集合 V を頂点とする**抽象単体複体** K とは V の部分集合族 $K \subset \mathfrak{P}(V)$ であって，次の条件を満たすもののこと．

(1) $\emptyset \notin K$.

(2) 任意の $v \in V$ に対し，$\{v\} \in K$.

(3) $\sigma \in K$，$\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ ならば，$\tau \in K$.

$p+1$ 個の元からなる $\sigma \in K$ のことを K の p-辺単体という．

幾何学的な（単体）複体 K の辺単体たちの集合を K' と書くと，K' は K の頂点集合 V を頂点とする抽象単体複体となっている．逆に，抽象単体複体 K が与えられたとき，次の例のように，対応する幾何学的な（単体）複体 $\tilde{K}$ を考えることができる．

例. $W_2 = \{w_0, w_1\}$（w_0, w_1 は相異なる元）としたとき，

$$K_1 = \mathfrak{P}(V) \setminus \{\emptyset\} = \{\{w_0\}, \{w_1\}, \{w_0, w_1\}\}$$

とおくと，K_1 は W_2 を頂点とする抽象単体複体で，w_0, w_1 を結ぶ線分と思える．

$K_2 = \{\{w_0\}, \{w_1\}\}$ とおくと，K_2 は W_2 を頂点とする抽象単体複体で，2 点 w_0, w_1 と思える（2 点間を結ぶ線分は含まない）．

例. $V_3 = \{v_0, v_1, v_2\}$（v_0, v_1, v_2 は相異なる元）としたとき，

$$L_1 = \mathfrak{P}(V) \setminus \{\emptyset\} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$$

とおくと，L_1 は V_3 を頂点とする抽象単体複体で，v_0, v_1, v_2 を頂点とする三角形（の周とその内部）と思える．

$L_2 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$ とおくと，L_2 は V_3 を頂点とする抽象単体複体で，3 点 v_0, v_1, v_2 と思える（辺や面は持たない）．

$L_3 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$ とおくと，L_3 は V_3 を頂点とする抽象単体複体で，v_0, v_1, v_2 を頂点とする三角形の周と思える（内部は含まない）．

問 1. 上記の L_1, L_2, L_3 以外の $V_3 = \{v_0, v_1, v_2\}$ を頂点とする抽象単体複体をすべて書き下し，対応する複体の絵を頂点や辺単体を明示して描け．

集合 V を頂点とする抽象単体複体 K と，集合 V' を頂点とする抽象単体複体 K' を考える．写像 $\phi\colon V \to V'$ が**単体写像**であるとは，K の任意の辺単体 $\sigma \in K$ に対し，その像 $\phi(\sigma)$ が K' の辺単体となること，すなわち $\phi(\sigma) \in K'$ となること．このとき単体写像 $\phi\colon K \to K'$ を与える，などということにする．

以下の例および問題で，表の例で挙げた K_i, L_j を用いる．

例. 写像 $\phi\colon W_2 \to V_3$ を次で定める．

$$\phi(w_0) = v_0, \quad \phi(w_1) = v_1.$$

ϕ は単体写像 $\phi\colon K_1 \to L_1$ を与えるが，K_1 から L_2 への単体写像にはなっていない．実際，$\{w_0, w_1\} \in K_1$ だが，$\phi(\{w_0, w_1\}) = \{v_0, v_1\} \notin L_2$ である．

例. 写像 $\psi\colon V_3 \to W_2$ を次で定める．

$$\psi(v_0) = w_0, \quad \psi(v_1) = \psi(v_2) = w_1.$$

ψ は単体写像 $\phi\colon L_1 \to K_1$ を与える（三角形で与えられる辺単体 $\{v_0, v_1, v_2\} \in L_1$ が線分 $\psi(\{v_0, v_1, v_2\}) = \{w_0, w_1\} \in K_1$ に「つぶれる」）．しかし，L_1 から K_2 への単体写像にはなっていない．実際，$\{v_0, v_1\} \in L_1$ だが，$\psi(\{v_0, v_1\}) = \{w_0, w_1\} \notin K_2$ である．

問 2. L_1 から K_2 への単体写像は全部で 2 個あり，L_1 から K_1 への単体写像は全部で 8 個ある．このことを証明せよ（ヒント：例えば，写像 $\{v_0, v_1, v_2\} \to \{w_0, w_1\}$ をすべて書き下し，それぞれが単体写像となっているか判定すればよい）．

問 3. （★）K を集合 V を頂点とする抽象単体複体とする．K の部分集合族 $\mathrm{Sd}(K)$ を次で定義する．

$$\mathrm{Sd}(K) = \{S \subset K \mid S \neq \emptyset,\ S\ \text{は包含関係に関して全順序集合}\}$$

このとき $\mathrm{Sd}(K)$ は K を頂点とする抽象単体複体となることが知られており，K の**重心細分**という．$\mathrm{Sd}(L_1), \mathrm{Sd}(L_2), \mathrm{Sd}(L_3)$ に対応する複体の絵を頂点を明示して描け（すべての辺単体を明示すると図が見にくくなると思うので頂点以外は明示しなくてもよい）．