2019 年度幾何学 II　演習問題 5　　2019 年 11 月 13 日

基点付き空間 $(X, x_0), (Y, y_0)$ の間の基点を保つ連続写像 $f\colon X \to Y$ は基本群の間の準同型写像

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad f_*([\ell]) = [f \circ \ell]$$

を誘導することが知られている．また，基点を保つ連続写像 $f\colon X \to Y$ がホモトピー同値写像ならば，基本群に誘導する準同型 f_* は同型写像となることが知られている．

基本的な事実として次が知られている．

定理． $\pi_1(S^1)$ は，$\mathrm{id}_{S^1}\colon S^1 \to S^1$ が定める元 $a = [\mathrm{id}_{S^1}] \in \pi_1(S^1)$ で生成される自由（アーベル）群 $(\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z})$.

例題． $P = \{p\}$ をただ一つの点 p のみからなる基点付き空間とする．このとき，$\pi_1(P, p)$ は単位群（単位元のみからなる位数 1 の群）であることを示せ．

解答例． 基点を保つ連続写像 $\ell\colon S^1 \to P$ はすべての点 $t \in S^1$ に対し $\ell(t) = p$ なる写像しか存在しない．したがってその商である $\pi_1(P, p)$ の位数も 1 でなければならない．

例題． 次の基点付き空間 $(U, (1, 0, 0))$ の基本群を求めよ．

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 1/2\}$$

解答例． $(U, (1, 0, 0))$ は点 $(0, 0, 1)$ に関する立体射影によって次の $(U', (1, 0))$ と基点を保って同相．

$$U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$$

U' は凸集合なので，次の写像は well-defined で連続．

$$F\colon U' \times [0, 1] \to U', \quad F(p, t) = (1 - t)p + t(1, 0)$$

基点の包含写像を $f\colon \{(1, 0)\} \to U'$, 基点への写像を $g\colon U' \to \{(1, 0)\}$ とすると，定値写像は連続なのでこれらは連続．$F(p, 0) = p$, $F(p, 1) = (1, 0) = (f \circ g)(p)$, $(g \circ f)(p) = p$ なので，f はホモトピー同値写像．ゆえに，合成写像

$$\pi_1(\{(1, 0)\}, (1, 0)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(U', (1, 0)) \xrightarrow{(\text{立体射影の逆写像})_*} \pi_1(U, (1, 0, 0))$$

は同型写像の合成なので，同型写像．ゆえに，$\pi_1(U, (1, 0, 0))$ は単位群．

問 1． 次の基点付き空間 $(A, (1, 0, 0))$ の基本群を求めよ．ただし，基点を保つホモトピー同値写像が基本群の同型写像を誘導することは用いてよい．

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1/2 < z < 1/2\}$$

（ヒント：例えば上の例題を真似して S^1 の基本群との同型を作ることができる．立体射影によって A がアニュラスに写ることを見て，S^1 との基点を保つホモトピー同値写像を与えればよい）

van Kampen の定理． 基点付き空間 (X, x_0) の開集合 $U, V \subset X$ について次を仮定する．

$$U \cup V = X, \quad x_0 \in U \cap V, \quad U, V, U \cap V \text{ は弧状連結}.$$

また，包含写像を次の文字で表す．

$$i_U : U \to X, \quad i_V : V \to X, \quad j_U : U \cap V \to U, \quad j_V : U \cap V \to V.$$

次で生成される $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ の同値関係 $\sim$ を考える：語 $x_1 \cdots x_n \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ に関し，ある $a \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ が存在して $x_k = (j_U)_*(a)$ となるとき，

$$x_1 \cdots x_n \sim x_1 \cdots x_{k-1}(j_V)_*(a)x_{k+1} \cdots x_n.$$

この同値関係による商 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/\sim$ は群となり，i_U, i_V は準同型

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/\sim \to \pi_1(X, x_0)$$

を誘導する．このとき，この準同型写像は同型写像．

以上が van Kampen の定理の主張である．

例題． $q_0 = (0, 0), q_1 = (1, 0), q_2 = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ とし，$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{q_1, q_2\}$ とする．このとき，$\pi_1(X, q_0)$ は階数 2 の自由群であることを示せ．

解答例．（解答例では図を省略するが，図を描いた方がよい）

$$U = \{(x, y) \in X \mid x > -1\}, \quad V = \{(x, y) \in X \mid x < 1\}$$

とおくと，$U, V \subset X$ は開集合で，次を満たす．

$$U \cup V = X, \quad x_0 \in U \cap V, \quad U, V, U \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\} \text{ は弧状連結}.$$

q_1 を中心とする半径 1 の円から U への包含写像，q_2 を中心とする半径 1 の円から V への包含写像，q_0 から $U \cap V$ への包含写像はそれぞれホモトピー同値写像であることがわかる．よって

$$\pi_1(U, q_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(V, q_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(U \cap V, q_0) = \{1\}.$$

$\pi_1(U \cap V, q_0)$ が単位群なので，van Kampen の定理における $\pi_1(U, q_0) * \pi_1(V, q_0)$ の同値関係 $\sim$ は等号 $=$ に一致する．すなわちその商は $\pi_1(U, q_0) * \pi_1(V, q_0)$ 自身に一致する．したがって

$$\pi_1(X, q_0) \cong \pi_1(U, q_0) * \pi_1(V, q_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

例題． 種数 g の閉曲面 $T(g)$ の基本群は次の表示をもつ．

$$\pi_1(T(g)) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

特に，トーラス $T^2 = T(1)$ について $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$．

問 2. 2 次元球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の基本群 $\pi_1(S^2, (1, 0, 0))$ は単位群であることを示せ（ヒント：例えば表の例題の U と，U を z 方向に -1 倍して得られる V を使う）．

問 3. （★）実射影平面 P^2 の基本群が位数 2 の巡回群となることを，van Kampen の定理を使うときに用いる開集合を図示することにより示せ．