2019年度幾何学II　演習問題4　　2019年10月30日

群 G, H に対し，**自由積** $G * H$ を次の性質で定義する（正確には語の集合を2番目と3番目の条件に対応する同値関係で割って定義する）．

- $G * H$ の元はある $n \geq 0$ と元 $x_1, \ldots, x_n \in G \sqcup H$（つまり，各 x_i は $x_i \in G$ または $x_i \in H$）によって $x_1 \cdots x_n$ と書ける（**語** (word) という）．**空語**（$\emptyset$ と書く）つまり $n = 0$ も許すことにする．
- 語 $x_1 \cdots x_n \in G * H$ に対し，もし $x_i, x_{i+1} \in G$ ならば，次の等号が成り立つ．
$$x_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_{i-1}(x_i x_{i+1})x_{i+2} \cdots x_n$$
$x_i, x_{i+1} \in H$ のときも同じ等式が成り立つ．
- 語 $x_1 \cdots x_n \in G * H$ に対し，もし x_i が G または H の単位元ならば，次の等号が成り立つ．
$$x_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n$$
- $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m \in G * H$ に対し，その積は単に並べたもの $x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m \in G * H$ とする．

$G * H$ は群となり，次の性質を満たす．

- $G * H$ の単位元は空語 $\emptyset$.
- $(g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$ が成り立つ．
- 単位元でない $G*H$ の元は必ず $g_1 h_1 \cdots g_i$, $g_1 h_1 \cdots g_i h_i$, $h_1 g_1 \cdots h_i$, $h_1 g_1 \cdots h_i g_i$（$g_j \in G \setminus \{1\}$, $h_j \in H \setminus \{1\}$, $i \geq 1$）のいずれかの形に**一意的に**書ける．

例題. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の各成分の生成元を a, b と書くとき，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の任意の元は $abab \cdots a$, $abab \cdots ab$, $baba \cdots b$, $baba \cdots ba$ のいずれかの形になっている．特に，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は無限群である．

$\mathbb{Z}$ の n 個の自由積 $F_n = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\cdots*\mathbb{Z}$ を階数 n の**自由群**という．F_n の各成分の生成元を $a_1, \cdots, a_n$ とおく．$r_1, \ldots, r_m \in F_n$ が単位元となるような同値関係を入れて作った群を

$$\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1 = \cdots = r_m = 1 \rangle$$

などと書く．より正確には任意の $b, c \in F_n$ と $j = 1, \ldots, m$ に対し，$br_jc \sim bc$ なる関係で生成される同値関係を入れる．これを群の**表示**といい，$a_1, \ldots, a_n$ を**生成元**，$r_1, \ldots, r_m$ を**関係**という（生成元や関係は有限でなくても定義できる）．

例題. 3 次対称群 S_3 の表示を与え，実際に S_3 と同型になることを確認せよ．

解答例. いろいろな解がありうるが，互換を生成元とする表示を与える．$s_1 = (1,2)$, $s_2 = (2,3)$ とおく．まず $s_1^2 = s_2^2 = 1$ が成り立つ．また，$s_1s_2s_1s_2s_1s_2 = 1$ も成り立つことが確認できる．

$$G = \langle a_1, a_2 \mid a_1^2 = a_2^2 = a_1a_2a_1a_2a_1a_2 = 1 \rangle$$

とおき，写像 $f\colon G \to S_3$ を $f(a_1) = s_1$，$f(a_2) = s_2$ となる準同型として定めたい．実際，$a_1^2, a_2^2, a_1a_2a_1a_2a_1a_2$ の像は上で確認したことから単位元に写るので，well-defined である．（線型代数学で学んだことより）S_3 は基本互換 s_1, s_2 で生成されるので，f は全射である．一方，群の表示から関係式

$$a_1^2 = 1, \quad a_2^2 = 1, \quad a_1a_2a_1 = a_2a_1a_2$$

が成り立つことに注意すると，G の元は「長さ」3 以下の語で表されるので，任意の元は次の 6 つのいずれかに等しい．

$$1, a_1, a_2, a_1a_2, a_2a_1, a_1a_2a_1$$

これより G の位数は 6 以下である．S_3 の位数が 6 であることと f が全射であることから，G の位数は 6 であり，f は単射である（鳩の巣原理）．よって f は同型写像であることが確認できたので，与えた群の表示 G は S_3 と同型．

コメント. 証明においては関係を見ることにより写像が well-defined であることを示すこと，生成元が像に含まれることを確認して全射を確認すること，与えた群の表示において各元がどのような形で書けるかを調べることにより単射を確認すること，の 3 点が重要．

問 1. 位数 n の巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は群 $G = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ と同型であることを示せ（ヒント：G の元は必ず a^i と書けるが，完全代表系を選ぶとき i としてどのようなものを選べばよいか？）．

問 2. 階数 2 の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^2$ は群 $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ と同型であることを示せ（ヒント：表示から $ab = ba$ となる．これより G の任意の元は a^ib^j と一意的に書けることを示し，このことを使う）．

問 3. （★）位数 4 の群が同型を除いて 2 つしかないことを示し，それらの表示を与えよ（ヒント：位数 4 の元を含むか含まないかで区別される）．