2019年度幾何学II　演習問題3　　2019年10月23日

位相空間 X の点 $x_0 \in X$ が固定されているとき，対 (X, x_0) を**基点付き空間**という．基点付き空間 (X, x_0) と (Y, y_0) の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が**基点を保つ**とは，$f(x_0) = y_0$ となること．また，基点を保つ連続写像 $f, g\colon X \to Y$ の間のホモトピー $F\colon X \times [0,1] \to Y$ が**基点を保つ**とは，任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し，$F(x_0, t) = y_0$ となること．このような基点を保つホモトピーが存在するとき，f は g に**基点を保ってホモトピック**という．

便利な記法を用意しておく．$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ から位相空間 X への連続写像のなす集合を $\mathrm{Map}\,(S^1, X)$ とし，連続写像 $\ell\colon [0,1] \to X$ であって，$\ell(0) = \ell(1)$ となるもののなす集合を $\mathrm{Map}'([0,1], X)$（一般的な記号ではない）とする．

$$\phi\colon [0,1] \to S^1, \quad \phi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

とおくと，次の写像は全単射であることが確認できる．

$$\phi^{\#}\colon \mathrm{Map}\,(S^1, X) \to \mathrm{Map}'([0,1], X), \quad \phi^{\#}(\ell) = \ell \circ \phi$$

なお，$\phi(0) = \phi(1) = (1,0)$ であることに注意しておく．このような対応は S^1 から X への写像のホモトピー $S^1 \times [0,1] \to X$ に対しても与えられる（以下の例題で使っている）．今後はこのような対応および同一視を断りなく使うことにする．

例題. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ とおく．基点付き空間 $(S^1, (1,0))$ から $(X, (0,0))$ への基点を保つ連続写像 $\ell, \ell'\colon S^1 \to X$ を次で定める．

$$\ell(t) = (2 - 2\cos 2\pi t, -2\sin 2\pi t), \quad \ell'(t) = (1 - \cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$$

とおく．このとき ℓ, ℓ' が基点を保つ連続写像となっていることを確認し，ℓ から ℓ' への基点を保つホモトピーを与えよ．

解答例. ℓ, ℓ' は $[0,1]$ からの写像として連続であり，$\ell(0) = \ell(1) = \ell'(0) = \ell'(1) = (0,0)$ なので連続写像 $S^1 \to \mathbb{R}^2$ を定める．これらの写像の像はそれぞれ点 $(2,0)$ を中心とする半径 2 の円，点 $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円となっているので，像に点 $(1,0)$ を含まない．以上から，基点を保つ連続写像 $\ell, \ell'\colon S^1 \to X$ が定まる．

$$F\colon S^1 \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) = ((2-s)(1-\cos 2\pi t), -(2-s)\sin 2\pi t)$$

なる連続写像 F を定義したい．実際，次のように確認できる．F は $[0,1] \times [0,1]$ から $\mathbb{R}^2$ への写像として連続．s を固定するごとに $t \mapsto F(t,s)$ は原点を始点として点 $(2-s, 0)$ を中心とする半径 $2-s$ の円を反時計回りに進む写像なので，点 $(1,0)$ は通らず，F の像は X に入る．また，任意の $0 \leq s \leq 1$ に対し $F(0,s) = F(1,s) = (0,0)$ なので連続写像 $F\colon S^1 \times [0,1] \to X$ が定まる．

そして，任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し $F(t,0) = \ell(t), F(t,1) = \ell'(t)$ であることと，上で確認したことから，F は ℓ から ℓ' への基点を保つホモトピーである．

問 1. 基点付き空間 $(S^1, (1,0))$ から $(\mathbb{R}^2, (0,0))$ への連続写像 $\ell\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ は原点に値をとる定値写像に基点を保ってホモトピックであることを示せ（ヒント：スカラー倍を使って原点に縮小するホモトピーを作ればよい）．

基点付き空間 (X, x_0) への $(S^1, (1,0))$ からの基点を保つ写像の全体を「基点を保ってホモトピック」という同値関係で割って得られる集合を (X, x_0) の**基本群**といい，$\pi_1(X, x_0)$ で表す．基点を省略して $\pi_1(X)$ と書くこともある．

基本群は次の演算によって群になることが知られている．基点を保つ写像 $\ell_1, \ell_2 \colon S^1 \to X$ に対し，

$$\ell_1\ell_2(t) = \begin{cases} \ell_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \ell_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

とする．これが連続写像であることは次の一般的な事実からわかる：$A_1 \cup A_2 = Y$ なる閉部分集合 $A_1, A_2 \subset Y$ に対し，写像 $f \colon Y \to Z$ が連続であるための必要十分条件は，制限写像 $f|_{A_1}, f|_{A_2}$ が連続となること．このとき，同値類のレベルで $[\ell_1][\ell_2] = [\ell_1\ell_2]$ が well-defined で，この演算により $\pi_1(X, x_0)$ は群となることが知られている．

「逆元の存在」については次のようにして確認できる．

例題. 基点付き空間 (X, x_0) への基点を保つ写像 $\ell \colon S^1 \to X$ に対し，基点を保つ連続写像 $\ell' \colon S^1 \to X$ を $\ell'(t) = \ell(1-t)$ で定義できることを示せ．また，$\ell\ell'$ は x_0 に値をとる定値写像に基点を保ってホモトピックであることを示せ．ただし，$(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$ で定まる関数 $\min \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続であることは用いてもよい．

解答例. $t \mapsto \ell(t)$ が $[0,1]$ からの写像として連続であることから，$t \mapsto \ell(1-t)$ も $[0,1]$ からの写像として連続．そして $\ell'(0) = \ell(1) = x_0, \ell'(0) = \ell(1) = x_0$ なので，ℓ' も S^1 からの連続写像を定め，基点を保つ．

$$F \colon S^1 \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) = \begin{cases} \ell(\min\{2t, 1-s\}) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \ell(\min\{1-2t, 1-s\}) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

とおくと，F を $[0,1] \times [0,1]$ からの写像と思ったとき，その制限 $F|_{[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]}, F|_{[\frac{1}{2},1]\times[0,1]}$ は連続．また，

$$F(0,s) = \ell(0) = x_0, F(1,s) = \ell(0) = x_0, F(t,0) = \ell\ell'(t), F(t,1) = \ell(0) = x_0$$

をみたすので，F は $\ell\ell'$ から x_0 に値をとる定値写像へのホモトピーを与える．

次は基点への定値写像が「右単位元」になっていることを確認する問題である．

問 2. 基点付き空間の (X, x_0) に対し，x_0 に値をとる定値写像を $c \colon S^1 \to X$ とする．このとき，基点を保つ写像 $\ell \colon S^1 \to X$ に対し，ℓc は ℓ に基点を保ってホモトピックであることを示せ．ただし，$(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$ で定まる関数 $\min \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続であることは用いてもよい．（ヒント：ℓc は速さ 2 で進んでから残りの時間は動かない写像，ℓ は速さ 1 で進む写像．速さを調節するホモトピーを与えれば OK）

問 3. （★）表で与えた次の写像が実際に全単射になっていることを確認せよ．

$$\phi^{\#} \colon \mathrm{Map}\,(S^1, X) \to \mathrm{Map}'([0,1], X), \quad \phi^{\#}(\ell) = \ell \circ \phi$$