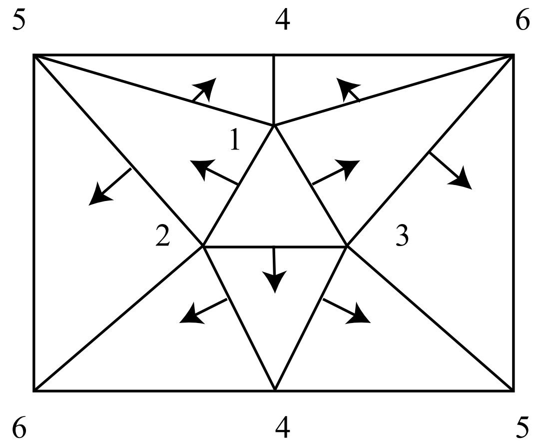
射影平面 P^2 のホモロジー群について

R を1をもつ可換環として，次の複体 K のホモロジー群 $H^*(K;R)$ を計算しよう（各頂点にはラベルがついているが，K は同じラベルがついている頂点を同一視して得られる複体）．



まず K は弧状連結なので，次がわかる．

$$H_0(K;R) \cong R$$

図の矢印に注目すると次がわかる．

$$\begin{aligned}
e_{12} - (e_{14} + e_{45} + e_{56} - e_{26}) &= \partial(s_{125} - s_{145} - s_{256}) \\
e_{13} - (e_{14} + e_{46} - e_{56} - e_{35}) &= \partial(s_{136} - s_{146} + s_{356}) \\
e_{15} - (e_{14} + e_{45}) &= \partial(-s_{145}) \\
e_{16} - (e_{14} + e_{46}) &= \partial(-s_{146}) \\
e_{23} - (e_{23} - e_{46} + e_{45} - e_{35}) &= \partial(s_{234} + s_{246} - s_{345}) \\
e_{24} - (e_{26} - e_{46}) &= \partial(s_{246}) \\
e_{25} - (e_{26} - e_{56}) &= \partial(s_{256}) \\
e_{34} - (e_{35} - e_{45}) &= \partial(s_{345}) \\
e_{36} - (e_{35} + e_{56}) &= \partial(s_{356})
\end{aligned}$$

これより，$\partial(s_{123})$ 以外の $\partial(s_{ijk})$ たちと $e_{14}, e_{26}, e_{35}, e_{45}, e_{46}, e_{56}$ は $C_1(K;R)$ の基底をなす．前者で生成される部分加群は $\ker\partial$ に含まれる．

$$\partial(a_{14}e_{14} + a_{26}e_{26} + a_{35}e_{35} + a_{45}e_{45} + a_{46}e_{46} + a_{56}e_{56}) = 0$$

とすると，左辺を整理して

$$-a_{14}v_1 - a_{26}v_2 - a_{35}v_3 + (a_{14} - a_{45} - a_{46})v_4 + (a_{35} + a_{45} - a_{56})v_5 + (a_{26} + a_{46} + a_{56})v_6 = 0$$

なので

$$a_{14} = a_{26} = a_{35} = 0, \quad a_{56} = -a_{46} = a_{45}$$

となる．つまり，$\ker\partial$ の基底として $\partial(s_{123})$ 以外の $\partial(s_{ijk})$ たちと $e_{56} - e_{46} + e_{45}$ がとれる（階数10）．また，次もわかる．

$$\partial(s_{123}) - 2(e_{45} - e_{46} + e_{56}) = \partial((s_{125} - s_{145} - s_{256}) - (s_{136} - s_{146} + s_{356}) + (s_{234} + s_{246} - s_{345}))$$

ゆえに，

$$H_1(K;R) \cong R/2R$$

となる．

　また，上の $\partial(s_{123})$ の計算から

$$H_2(K;R) \cong \mathrm{Ann}_R(2)$$

ただし右辺は 2 倍すると 0 になる元からなる R のイデアル．

　$R=\mathbb{Z}$ のとき

$$H_i(K;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

　$R=\mathbb{F}_2$ のとき

$$H_i(K;\mathbb{F}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & i=0,1,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

　$R=\mathbb{Q}$ のとき

$$H_i(K;\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & i=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$