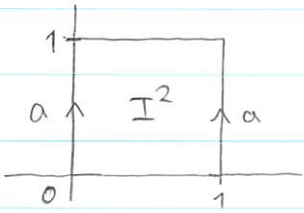
貼り合わせのとり方について

$\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$: $\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1$ となる同相写像とする



左の I^2 上で次の関係で生成される同値関係 $\sim_\varphi$ を考える.

$$(0,t) \sim_\varphi (1,\varphi(t))$$

φ が恒等写像 $id_{[0,1]}$ のときは $\sim$ と書く.

<u>Prop.</u>

$I^2/\sim_\varphi$ は $I^2/\sim$ と同相. $\square$

これを示す.

<u>Lem</u>

$\Phi : [0,\varepsilon]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$: conti. $(0<\varepsilon<1)$ であって

次をみたすものが存在する:

- $\Phi(0,t) = \varphi^{-1}(t)$
- $\Phi(\varepsilon,t) = t$
- 任意の $s_0 \in [0,\varepsilon]$ に対し, $t \longmapsto \Phi(s_0,t)$ で定まる $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ は同相写像 $\square$

このような Φ を φ^{-1} から $id_{[0,1]}$ への <u>isotopy</u> という

<u>Proof of Prop.</u>

<u>Lem</u> の Φ を使って $\hat{f} : I^2 \longrightarrow I^2$ を次で定めると同相写像.

$$\hat{f}(s,t) = \begin{cases} (s,\Phi(s,t)) & (0\le s\le \varepsilon) \\ (s,t) & (\varepsilon\le s\le 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(0,t) &= (0,\Phi(0,t)) \\ &= (0,\varphi^{-1}(t)) \sim (1,t) = \hat{f}(1,t)\end{aligned}$$

なので, $f([s,t]) = \hat{f}(s,t)$ は連続写像 $f : I^2/\sim \ \to I^2/\sim_\varphi$ を定める

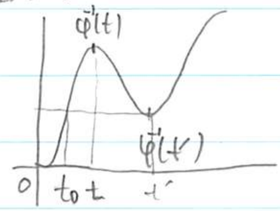
$\hat{f}^{-1}$ が $f' : I^2/\sim_\varphi \to I^2/\sim$ を誘導することも確認できる.

したがって f は同相写像. $\square$

Proof of Lem.

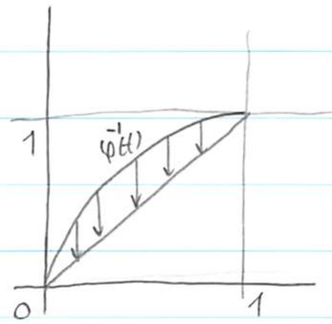
$0<\varepsilon<1$ を固定する．

φ^{-1} は単射連続で $\varphi^{-1}(0)=0<1=\varphi^{-1}(1)$ なので，単調増加．



(∵) $t<t'$, $\varphi^{-1}(t)>\varphi^{-1}(t')$ とすると，
中間値の定理より $0\le t_0\le t$ であって
$\varphi^{-1}(t_0)=\varphi^{-1}(t')$ となる t_0 が存在．
これは単射性に反する．よって，$\varphi^{-1}(t)\le\varphi^{-1}(t')$ である．

$$\Phi(s,t)=\frac{\varepsilon-s}{\varepsilon}\varphi^{-1}(t)+\frac{s}{\varepsilon}t$$ とおくと



連続写像 $\Phi:[0,\varepsilon]\times[0,1]\to[0,1]$ を定める．

これは $\Phi(0,t)=\varphi^{-1}(t)$

$\Phi(\varepsilon,t)=t$ をみたす．

$t\mapsto\Phi(s_0,t)$ は同相．（$s_0\in[0,\varepsilon]$ は固定）

(∵) $t\le t'$ に対し $\Phi(s_0,t)=\Phi(s_0,t')$ とすると，

$$\frac{\varepsilon-s_0}{\varepsilon}\varphi^{-1}(t)+\frac{s_0}{\varepsilon}t=\frac{\varepsilon-s_0}{\varepsilon}\varphi^{-1}(t')+\frac{s_0}{\varepsilon}t' \quad \cdots ☆$$

変形して

$$(\varepsilon-s_0)(\varphi^{-1}(t)-\varphi^{-1}(t'))=s_0(t'-t)$$

ここで（右辺）≥ 0 だが，（左辺）≤ 0（∵ φ^{-1}：単調増加）

よって ☆ は（左辺）＝（右辺）$=0$．

したがって $t=t'$．つまり $t\mapsto\Phi(s_0,t)$ は単射．

また，$\Phi(s_0,0)=0$，$\Phi(s_0,1)=1$ なので

中間値の定理より $t\mapsto\Phi(s_0,t)$ は全射．

$[0,1]$ はコンパクトHausdorffなので同相．