Unstable homotopy types of spaces of finite propagation unitary operators on $\mathbb{Z}$

Mitsunobu Tsutaya (Kyushu Univ.)

Joint Seminar between Kansai Gauge Theory and Kyoto Algebraic Topology
May 25, 2020

この講演は加藤毅氏（京都大）と岸本大祐氏（京都大）との共同研究に基づく.

1. 準備と主結果
    - 準備：finite propagation operator
    - 準備：uniform Roe algebra
    - 準備：「似ている」代数
    - 主結果
    - K-群との比較
    - $\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))$ のホモトピー型

準備：finite propagation operator

$$H = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{(v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid v_i \in \mathbb{C}, \sum_{i \in \mathbb{Z}} |v_i|^2 < \infty\}$$

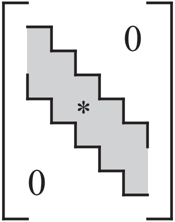
$$H_+ = \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{C}), \quad H_- = \ell^2(\mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{C}), \quad H = H_+ \oplus H_-.$$

$B(H)$ 有界線型作用素 $H \to H$ の全体.

$T \in B(H) \Longrightarrow$ 行列表示 $T = (T_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix}$.

定義

prop $T = \sup\{|i-j| \mid T_{ij} \neq 0\}$.
prop $T < \infty$ なる T を finite propagation operator という.



準備：uniform Roe algebra

定義

$\mathbb{C}_u(\mathbb{Z}) = \{T \in B(H) \mid \text{prop}\, T < \infty\}$.
$\mathbb{C}_u(\mathbb{Z})$ の $B(H)$ での閉包 $C_u^*(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ の uniform Roe algebra という.

- uniform Roe algebra は $\mathbb{Z}$ 以外の距離空間に対しても定義されている.
- uniform Roe algebra は指数定理の非コンパクト多様体への拡張のために Roe により定義された.
- uniform Roe algebra は C^*-代数になっている.

A を C^*-代数とする.

$$\mathrm{U}(A) = \{U \in A \mid UU^* = U^*U = \mathrm{id}\}.$$

これは Banach Lie 群になっている.

問

$\mathrm{U}(C^*_u(\mathbb{Z}))$ はどのようなホモトピー型をもつか？

- 可逆元の全体 $\mathrm{GL}(A)$ への包含写像 $\mathrm{U}(A) \subset \mathrm{GL}(A)$ はホモトピー同値写像であることが知られている（極分解）.

例

$\mathrm{U}(B(H))$ は可縮（Kuiper の定理）．

例

$K(H) \subset B(H)$ をコンパクト作用素の全体とする．
$\mathrm{U}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{U}(n)$ とすると，$\mathrm{U}(\mathbb{C} \oplus K(H))$ は $\mathrm{U}(\infty) \times S^1$ とホモトピー同値．

- $\mathbb{C} \oplus K(H) \subset C^*_u(\mathbb{Z}) \subset B(H)$.

他にも比較対象を導入する．

準備：「似ている」代数

定義（Segal–Wilson, 1985）

$B^{\mathrm{SW}} = \{ T \in B(H) \mid T_{+-}, T_{-+}$はコンパクト作用素$\}$.

定理（Segal–Wilson, 1985）

$\mathrm{U}(B^{\mathrm{SW}})$ は $B\,\mathrm{U}(\infty) \times \mathbb{Z}$ とホモトピー同値.

$\Delta\colon C^*_u(\mathbb{Z}) \to C^*_u(\mathbb{Z})$ を $\Delta(T) = (T_{i+1,j+1})_{ij}$ で定義する.

定義

$\mathbb{P}_u(\mathbb{Z}) = \{ T \in \mathbb{C}_u(\mathbb{Z}) \mid$ ある $n \geq 1$ に対し$\Delta^n(T) = T\}$.
$\mathbb{P}_u(\mathbb{Z})$ の $B(H)$ での閉包を $P^*_u(\mathbb{Z})$ と書く.

- $P^*_u(\mathbb{Z}) \subset C^*_u(\mathbb{Z}) \subset B^{\mathrm{SW}} \subset B(H)$.

主結果

$\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$ で添え字付けられた整数値有界数列のなすアーベル群.
$\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})_{\mathrm{shift}} = \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})/\{a - Sa \mid a \in \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\}$.
ただし $a = (a_j)_j$ のとき $Sa = (a_{j+1})_j$. この群は非自明.

定理（Kato–Kishimoto–T.）

- $$\pi_i(\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } i \geq 0 \text{ even}, \\ \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})_{\mathrm{shift}} & \text{for } i \geq 1 \text{ odd}, \end{cases}$$
- $$\pi_i(\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } i \geq 0 \text{ even}, \\ \mathbb{Q} & \text{for } i \geq 1 \text{ odd}, \end{cases}$$
- $\pi_{2i}(\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))) \xrightarrow{\cong} \pi_{2i}(\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z}))) \xrightarrow{\cong} \pi_{2i}(\mathrm{U}(B^{\mathrm{SW}}))$,
- $\pi_{2i-1}(\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))) \to \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z})))$ は単射.

注意

単射準同型 $\mathbb{Q} \to \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})_{\mathrm{shift}}$ は次で与えられる.

$$\frac{m}{n} \mapsto [\ldots, m, (0)^{n-1}, m, (0)^{n-1}, m, (0)^{n-1}, \ldots].$$

ただし $n \geq 1$ で，$(0)^{n-1}$ は 0 が $n-1$ 個並んでいることを表す.
例えば $1, \frac{1}{2}$ の像は次のようになる.

$$1 \mapsto [\ldots, 1, 1, 1, \ldots], \quad \frac{1}{2} \mapsto [\ldots, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots].$$

$\tilde{P}_u^*(\mathbb{Z}) = P_u^*(\mathbb{Z}) \oplus K(H)$ の元を periodic at infinity という.
$\mathrm{U}(\tilde{P}_u^*(H)) = \tilde{\mathrm{U}} \rtimes \mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))$ となる.
ただし，$\tilde{\mathrm{U}} = \ker[\mathrm{U}(\mathbb{C} \oplus K(H)) \to S^1] \simeq \mathrm{U}(\infty)$.

定理（Kato–Kishimoto–T.）

$$\pi_i(\mathrm{U}(\tilde{P}_u^*(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } i \geq 0 \text{ even}, \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z} & \text{for } i \geq 1 \text{ odd}, \end{cases}$$

K-群との比較

C^*-代数 A の K-群は次で特徴づけられる（Bott 周期性から整数 $i \geq 0$ は何でもよい）.

$$K_0(A) = \lim_{n\to\infty} \pi_{2i+1}(\mathrm{U}_n(A)), \quad K_1(A) = \lim_{n\to\infty} \pi_{2i}(\mathrm{U}_n(A))$$

$\mathrm{U}_n(A)$ は A に値をとる n 次ユニタリ群.
ここで極限は次の包含写像の列に関して取る.

$$\mathrm{U}(A) = \mathrm{U}_1(A) \subset \mathrm{U}_2(A) \subset \mathrm{U}_3(A) \subset \cdots$$

注意

一般に $\pi_i(\mathrm{U}_n(A))$ とその極限は異なる．$A = \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\pi_i(\mathrm{U}_n(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}))) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le i < 2n \text{ even}, \\ \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) & \text{for } 1 \le i \le 2n-1 \text{ odd}, \\ \prod_{j\in\mathbb{Z}} \pi_i(\mathrm{U}(n)) & \text{for } i \ge 2n. \end{cases} \\
&\lim_{n\to\infty} \pi_i(\mathrm{U}_n(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}))) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } i \ge 0 \text{ even}, \\ \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) & \text{for } i \ge 1 \text{ odd}. \end{cases}
\end{aligned}$$

$C_u^*(\mathbb{Z}) = \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rtimes_\Delta \mathbb{Z}$ crossed product が知られている．
crossed product に関する Pimsner–Voiculescu 完全列：

$$\begin{tikzcd}
K_0(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})) \arrow[r, "1-\Delta_*"] & K_0(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})) \arrow[r] & K_0(C_u^*(\mathbb{Z})) \arrow[d] \\
K_1(C_u^*(\mathbb{Z})) \arrow[u] & K_1(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})) \arrow[l] & K_1(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})) \arrow[l, "1-\Delta_*"']
\end{tikzcd}$$

から次が計算できる．

$$K_i(C_u^*(\mathbb{Z})) = \begin{cases} \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})_{\mathrm{shift}} & \text{for } i = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{for } i = 1. \end{cases}$$

$P_u^*(\mathbb{Z})$ についても同様の計算ができる．

今の場合には具体的計算から「安定性」を示すことができる.

定理（Kato–Kishimoto–T.）
各 $n \geq 1$ に対し，包含写像

$$\mathrm{U}_n(C_u^*(\mathbb{Z})) \to \mathrm{U}_{n+1}(C_u^*(\mathbb{Z})), \quad \mathrm{U}_n(P_u^*(\mathbb{Z})) \to \mathrm{U}_{n+1}(P_u^*(\mathbb{Z}))$$

はホモトピー同値写像.

疑問
このような「安定性」は $\mathbb{Z}$ の距離空間の幾何学から導かれるか？
また，適当なクラスの距離空間の uniform Roe algebra に対して同様の性質を示すことができるか？

$\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))$ のホモトピー型

ホモトピー群を計算するときに使うファイブレーションを詳しく観察すると次も示される.

定理（Kato–Kishimoto–T.）
$\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))$ は次の空間とホモトピー同値.

$$B\,\mathrm{U}(\infty) \times \mathbb{Z} \times \prod_{i\geq 1}^{\circ} K(\mathbb{Q}, 2i-1)$$

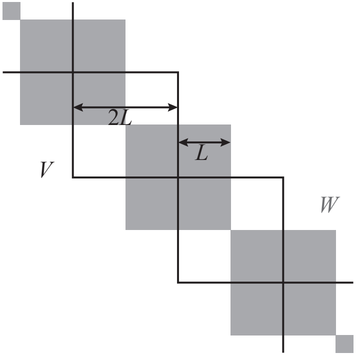
ただし，$\prod_{i\geq 1}^{\circ} X_i$ は基点付き空間 X_i の有限個の直積 $\prod_{i\geq 1}^{n} X_i$ の n に関する帰納極限.

2. 証明
   - ブロック対角分解
   - ホモトピー群の計算

ブロック対角分解

補題（Gross–Nesme–Vogts–Werner, 2012）

単位元成分に属する $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}_u(\mathbb{Z}))$ に対し，$\mathrm{prop}\, U \leq L$ ならば，$U = VW$ なる次のようなブロック対角ユニタリ作用素 V, W が存在する.



$\mathrm{U}(B_0(2L))$ V のような作用素で原点を基点とするもの全体
$\mathrm{U}(B_{-L}(2L))$ $-L$ だけずらしたもの
$\mathrm{U}(B_0(L))$ これらの共通部分
この記号の下で，次の商空間を定義する.

$$\mathcal{W}_L := [\mathrm{U}(B_0(2L)) \times \mathrm{U}(B_{-L}(2L))] / \mathrm{U}(B_0(L)) \subset \mathrm{U}(\mathbb{C}_u(\mathbb{Z}))$$

これは次のファイバー束を与える.

$$\mathrm{U}(B_0(L)) \to \mathrm{U}(B_0(2L)) \times \mathrm{U}(B_{-L}(2L)) \to \mathcal{W}_L$$

このような $\mathcal{W}_L$ の和集合は補題から $\mathrm{U}(\mathbb{C}_u(\mathbb{Z}))$ に一致する.
このことを使ってホモトピー群を計算したい.

ホモトピー群の計算

$\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z}))$ の弧状連結成分 $\pi_0(\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z})))$ は $\mathbb{Z}$ と同型になる（省略）.
単位元成分について考えればよい.
$\mathrm{U}(B_k(L)) \cong \mathrm{U}_L(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}))$ のホモトピー群はわかっており，$\mathcal{W}_L$ のホモトピー群は次の完全列から計算できる。

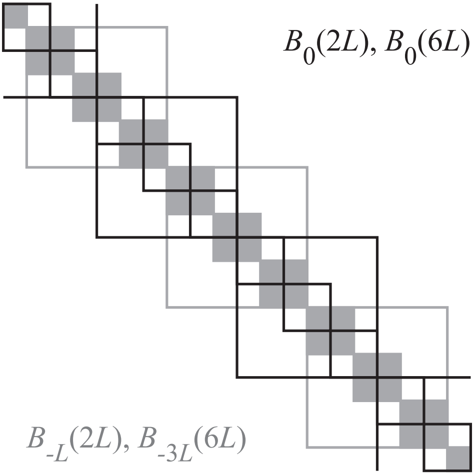
$$\begin{aligned}0 \to \pi_{2i}(\mathcal{W}_L) \to \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(L)))&\\ \to \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(2L)) \times \mathrm{U}(B_{-L}(2L))) &\to \pi_{2i-1}(\mathcal{W}_L) \to 0\end{aligned}$$

ただし $1 \leq i \leq L$（stable range）.

補題

$$\pi_i(\mathcal{W}_L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } 2 \leq i \leq 2L \text{ even}, \\ \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})_{\mathrm{shift}} & \text{for } 1 \leq i \leq 2L-1 \text{ odd}. \end{cases}$$

次の図のような包含関係から $\mathcal{W}_L \subset \mathcal{W}_{3L}$ とそれに付随するファイバー束の包含関係が得られる.



この包含関係から次の図式を得る.

$$\begin{CD}
0 @>>> \pi_{2i}(\mathcal{W}_L) @>>> \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(L))) @>>> \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(2L))\times \mathrm{U}(B_{-L}(2L))) @>>> \pi_{2i-1}(\mathcal{W}_L) @>>> 0\\
@. @VVV @VVV @VVV @VVV @.\\
0 @>>> \pi_{2i}(\mathcal{W}_{3L}) @>>> \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(3L))) @>>> \pi_{2i-1}(\mathrm{U}(B_0(6L))\times \mathrm{U}(B_{-3L}(6L))) @>>> \pi_{2i-1}(\mathcal{W}_{3L}) @>>> 0
\end{CD}$$

これを計算すると次を得る.

補題

$$\pi_i(\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{3^nL}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } i \geq 2 \text{ even}, \\ \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})_{\mathrm{shift}} & \text{for } i \geq 1 \text{ odd}. \end{cases}$$

これと無限次元多様体のトポロジーの議論を組み合わせると $\mathrm{U}(C_u^*(\mathbb{Z}))$ のホモトピー群を得る（詳細略）.
$\mathrm{U}(P_u^*(\mathbb{Z}))$ や $\mathrm{U}(B^{\mathrm{SW}})$ のホモトピー群に対しても同様の計算ができ，この計算結果から誘導準同型を求めることができる（詳細略）.