Finiteness of A_n-equivalence types of gauge groups

蔦谷 充伸

(九州大学)

1 導入

$P \to B$: 主G束

$f : P \to P$ が ゲージ変換

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ fは G同変 かつ
$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & P \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$
$\square$

$\mathcal{G}(P) := (P$のゲージ変換全体$)$: ゲージ群.

応用: 主束の理論, ゲージ理論,
写像空間のホモトピー論 など.

問題

$P \to B$, $P' \to B$: 主G束 に対し

$\mathcal{G}(P)$ と $\mathcal{G}(P')$ が"同値"になるのはいつか? $\square$

<u>注意</u>

- $P \simeq P'$: 主G束の同型

  $\Longrightarrow$ $\mathcal{G}(P) \simeq \mathcal{G}(P')$: 位相群の同型.

- G : 可換

  $\Longrightarrow$ $\mathcal{G}(P) \simeq \mathcal{G}(P')$: 位相群の同型.

G, G'：位相群

$f: G \longrightarrow G'$：単位元を保つ

f が A_2 写像 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ "f は演算を up to homotopy で保つ"

(Sugawara, 1960
Stasheff, 1963)

f が A_3 写像 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ "f は演算とホモトピー結合性を up to homotopy で保つ"

⋮

f が A_n 写像 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ "f は演算と n 次までのホモトピー結合性を up to homotopy で保つ"

$(n = 1, 2, \dots, \infty)$

f が A_n 同値 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は A_n 写像かつホモトピー同値.

Fact

$$G \underset{A_1}{\simeq} G' \iff G \simeq G' \text{：ホモトピー同値}.$$

$$\underbrace{BG}_{G\text{の分類空間}} \ \ G \underset{A_\infty}{\simeq} G' \iff BG \simeq BG' \text{：ホモトピー同値}.$$

$$G \cong G' \text{：同型} \implies G \underset{A_\infty}{\simeq} G'$$

$\square$

2 先行結果

一般論

G：連結コンパクトLie群，B：有限CW複体

Thm (Crabb-Sutherland, 2000).

$$\#\left(\{\mathcal{G}(P) \mid P : B\text{上の主}G\text{束}\}/A_2\text{同値}\right) < \infty$$

$\square$

具体例

$P_k \to S^4$: 主 $SU(2)$ 束　$c_2(P_k)[S^4] = k$.

Thm

$$\mathcal{G}(P_k) \underset{A_1}{\simeq} \mathcal{G}(P_\ell) \Leftrightarrow \underline{(12, k)} = (12, \ell) \quad \text{(Kono, 1991)}.$$

最大公約数

$$\mathcal{G}(P_k) \underset{A_2}{\simeq} \mathcal{G}(P_\ell) \Leftrightarrow (180, k) = (180, \ell) \quad \text{(G-S, 2000)}.$$

$$\mathcal{G}(P_k) \underset{A_\infty}{\simeq} \mathcal{G}(P_\ell) \Leftrightarrow |k| = |\ell| \quad \text{(Tsukuda, 2001)}.$$

A_∞ 同値類は有限性が破綻. $\square$

⇝ A_n 同値 $(2 < n < \infty)$ ではどうか？

3 主結果

$\boxed{\text{一般論}}$

G: 連結コンパクト Lie 群, B: 有限CW複体, n: 正の整数

Thm (T, 2012)

$$\#\left(\{\mathcal{G}(P) \mid P: B\text{上の主}G\text{束}\}/A_n\text{同値}\right) < \infty$$

$\square$

具体例

$P_k \longrightarrow S^4$: 主 $SU(2)$ 束　$c_2(P_k)[S^4] = k$.

Thm (T. 2015)

$$\mathcal{G}(P_k) \underset{A_n}{\simeq} \mathcal{G}(P_\ell)$$

$$\Longrightarrow \forall p : \text{奇素数},\ \min\left\{\left[\frac{2n}{p-1}\right], \underline{\nu_p(k)}\right\} = \min\left\{\left[\frac{2n}{p-1}\right], \nu_p(\ell)\right\}$$

kを素因数分解したときのpの指数.

特に k, ℓ が奇数ならば逆も成立.

$\square$