

1/9

Finiteness of  $A_n$ -equivalence  
types of gauge groups

葛谷 亮伸  
(九州大学).

# 1 導入

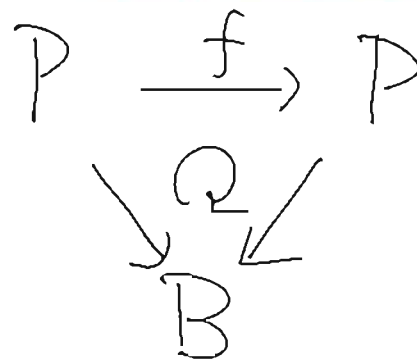
2/9

$P \rightarrow B$  : 主  $G$  束

$f: P \rightarrow P$  が ゲージ変換

def  $\iff$

$f$  は  $G$  同変 かつ



□

$\mathcal{G}(P) := (P \text{ のゲージ変換全体})$  : ゲージ群.

応用: 主束の理論, ゲージ理論,  
写像空間のホモトピー論 など.

問題

$P \rightarrow B, P' \rightarrow B : \exists G$  束 に対し

$\mathcal{G}(P)$  と  $\mathcal{G}(P')$  が "同値" になるのはいつか?  $\square$

注意

- $P \cong P' : \exists G$  束の同型  
 $\Rightarrow \mathcal{G}(P) \cong \mathcal{G}(P') : \text{位相群の同型.}$
- $G : \text{可換}$   
 $\Rightarrow \mathcal{G}(P) \cong \mathcal{G}(P') : \text{位相群の同型.}$

$G, G'$ : 位相群.

$f: G \rightarrow G'$ : 単位元を保つ.

(Sugawara, 1960)  $f$  が  $A_2$  写像  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  " $f$  は演算を up to homotopy で保つ"

(Stasheff, 1963)  $f$  が  $A_3$  写像  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  " $f$  は演算とホモトピー結合性を up to homotopy で保つ"

$f$  が  $A_n$  写像  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  " $f$  は演算と  $n$  次までのホモトピー結合性を up to homotopy で保つ"  
( $n=1, 2, \dots, \infty$ )

$f$  が  $A_n$  同値  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$   $f$  は  $A_n$  写像 かつ ホモトピー同値.

Fact

$$G \underset{A_1}{\simeq} G' \iff G \simeq G' : \text{ホモトピー同値.}$$

$$G \underset{A_\infty}{\simeq} G' \iff \underbrace{BG}_{G \text{ の分類空間}} \simeq BG' : \text{ホモトピー同値.}$$

$$G \simeq G' : \text{同型} \implies G \underset{A_\infty}{\simeq} G'$$



## 2 先行結果

6/9

### 一般論

$G$ : 連結コンパクト Lie 群,  $B$ : 有限 CW 複体

Thm (Crabb-Sutherland, 2000).

$$\# (\{g(P) \mid P: B \text{ 上の } G \text{ 束}\} / A_2 \text{ 同値}) < \infty$$

□

# 具体例

7/9

$$P_k \rightarrow S^4 : \cong \text{SU}(2)\text{束} \quad G(P_k)[S^4] = k.$$

## Thm

$$G(P_k) \underset{A_1}{\sim} G(P_l) \iff \underbrace{(12, k)}_{\text{最大公約数}} = (12, l) \quad (\text{Kono, 1991}).$$

$$G(P_k) \underset{A_2}{\sim} G(P_l) \iff (180, k) = (180, l) \quad (\text{C-S, 2000}).$$

$$G(P_k) \underset{A_\infty}{\sim} G(P_l) \iff |k| = |l| \quad (\text{Tsukada, 2001}).$$

$A_\infty$ 同値類は有限性が破綻 □

$\rightsquigarrow$   $A_n$ 同値  $(2 < n < \infty)$  ではどうか?

### 3 主結果

8/9

#### 一般論

$G$ : 連結コンパクト Lie 群,  $B$ : 有限 CW 複体,  $n$ : 正の整数

Thm (T, 2012)

$$\#(\{S(P) \mid P: B \text{ 上の } \mathfrak{g} \text{ 束}\} / A_n \text{ 同値}) < \infty$$





# 具体例

$$P_k \rightarrow S^4 : \pm SU(2)\text{束} \quad G_2(P_k)[S^4] = k.$$

Thm (T. 2015)

$$G(P_k) \underset{A_n}{\sim} G(P_\ell)$$

$$\Rightarrow \forall p: \text{奇素数}, \min \left\{ \left[ \frac{2n}{p-1} \right], \nu_p(k) \right\} = \min \left\{ \left[ \frac{2n}{p-1} \right], \nu_p(\ell) \right\}$$

$\nu_p(k)$  を素因数分解したときの  $p$  の指数.

特に  $k, \ell$  が奇数ならば逆も成立.

