● $f(a)$ は極小値ではあるが，
「ある $h>0$ に対して，$a-h<x<a$ で単調減少，$a<x<a+h$ で単調増加」
とはなっていない函数の例：

$$f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

実際，

$$f(x) = x^2 + x^2 \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) \geqq x^2 \geqq 0 = f(0)$$

であるから，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=0$ をとる．とくに $f(0)$ は極小値である．
しかし，$x \neq 0$ のとき

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

であり，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f'\left(\pm \frac{1}{n\pi}\right) = \pm \frac{4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) = \pm \frac{4}{n\pi} + (-1)^{n-1}.$$

$\dfrac{4}{2\pi} < 1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$f'\left(\pm \frac{\pi}{n}\right) < 0 \quad (n \text{ は偶数}), \qquad f'\left(\pm \frac{\pi}{n}\right) > 0 \quad (n \text{ は奇数}).$$

$x \neq 0$ で $f'(x)$ は連続であるから，$m \geqq 1$ のとき，$\pm \dfrac{\pi}{2m}$ の近くで $f'(x) < 0$，$\pm \dfrac{\pi}{2m+1}$ の近くで $f'(x) > 0$．ゆえに $h > 0$ をいかに小さくとっても，$-h < x < 0$ で $f(x)$ は単調減少ではなく，$0 < x < h$ で $f(x)$ は単調増加ではない．

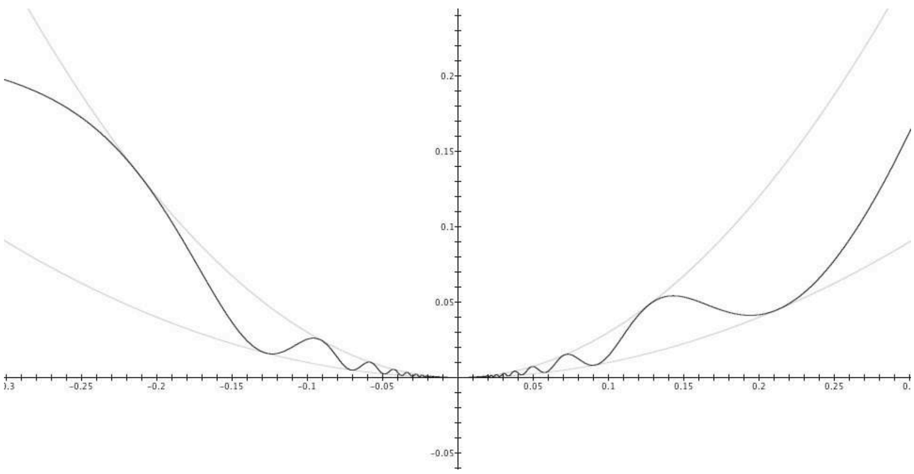

図 1．$y = 2x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$：$y = x^2$ と $y = 3x^2$ の間を振動する

• 媒介変数で表示された函数のグラフ： $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^t \end{cases}$

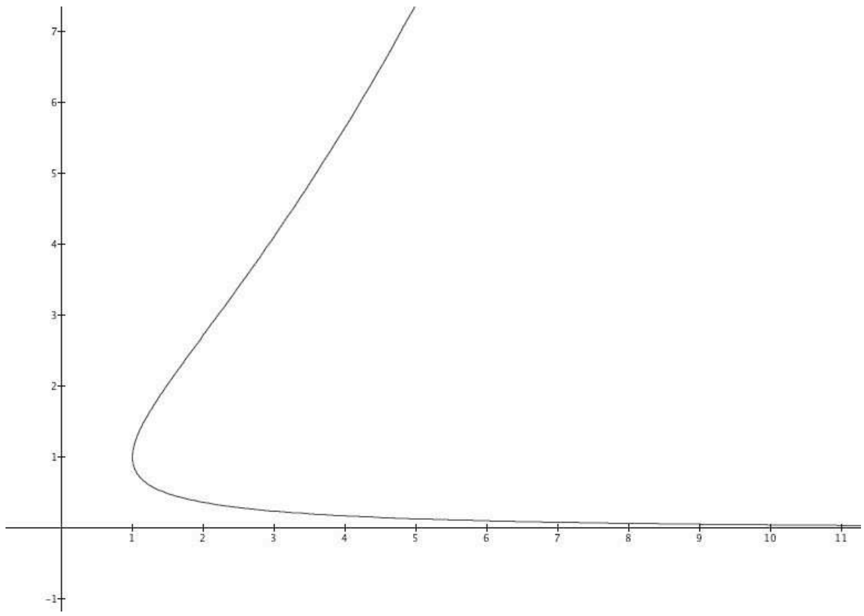

図 2. $x = (\log y)^2 + 1$