微分積分学 B・演習問題 3

（2012 年 1 月 19 日配付・1 月 26 日実施）　　（担当：野村隆昭）

[1]　次の各 2 変数函数に極値があれば，それを求めよ．

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$　　(2) $f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy+1$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2+1}$　　(4) $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

[2]　次の各 2 変数函数に極値があれば，それを求めよ．

(1) $f(x,y)=x^3-x-y^2$　　(2) $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$

(3) $f(x,y)=x^3-3x+xy^2$　　(4) $f(x,y)=(x^2y-x-1)^2+(x^2-1)^2$

[3]　次で定義される $F(x,y)=0$ で定まる陰函数 $y=f(x)$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．また $f'(a)=0$ となる a を求め，その a に対して $f''(a)=-\dfrac{F_{xx}(a,f(a))}{F_y(a,f(a))}$ を求めよ．

(1) $x^3+y^3-3xy-3=0$　　(2) $2x^3-3x^2+y^2-3=0$

[4]　$x^4+y^4-4xy=0$ で定まる陰函数 $y=f(x)$ について，

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) (1) より，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2xy(3+x^2y^2)}{(x-y^3)^3}$ であることを導け（教科書の定理 4.4.4 の公式は使わないこと）．

[5]　次の関係式で定まる x の陰函数 y の極値を求めよ．

(1) $xy(x-y)=2$　　(2) $x^3y^3+y-x=0$

（(2) まず極値の候補者の点 (a,b) は $b=\frac{2}{3}a$ をみたすことを示せ．）

[6]　有界閉領域 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq 1$ 上の函数

$$F(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$$

の最大値と最小値を求めよ．

（条件を付けないときの函数の極値と，閉領域の境界の点での値を比べる．）

[7]　条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，函数 $F(x,y)=x^3+y^3$ の最大値と最小値を，Lagrange の未定乗数法により求めよ．

以上