

微分積分学 B・演習問題 3

(2012 年 1 月 27 日配付・2 月 3 日実施)

(担当：野村隆昭)

[1] 次の各 2 変数関数に極値があれば，それを求めよ．

$$(1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad (2) f(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2 - 4xy + 1$$

$$(3) f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \quad (4) f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

[2] 次の各 2 変数関数に極値があれば，それを求めよ．

$$(1) f(x, y) = x^3 - x - y^2 \quad (2) f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

$$(3) f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2 \quad (4) f(x, y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$$

[3] 次で定義される $F(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ に対して， $f'(x)$ を求めよ．また $f'(a) = 0$ となる a を求め，その a に対して $f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}$ を求めよ．

$$(1) x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0 \quad (2) 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 3 = 0$$

[4] $x^4 + y^4 - 4xy = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ について，

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) (1) より， $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy(3 + x^2y^2)}{(x - y^3)^3}$ であることを導け（教科書の定理 4.4.4 の公式は使わないこと）．

[5] 次の関係式で定まる x の陰関数 y の極値を求めよ．

$$(1) xy(x - y) = 2 \quad (2) x^3y^3 + y - x = 0$$

((2) まず極値の候補者の点 (a, b) は $b = \frac{2}{3}a$ をみたすことを示せ.)

[6] 有界閉領域 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ 上の函数

$$F(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

の最大値と最小値を求めよ．

(条件を付けないときの函数の極値と，閉領域の境界の点での値を比べる.)

[7] 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，函数 $F(x, y) = x^3 + y^3$ の最大値と最小値を，Lagrange の未定乗数法により求めよ．

以上