微分積分学 B・演習問題 2

（2011 年 11 月 24 日配付・12 月 1 日実施）　　（担当：野村隆昭）

[1] 次の式を証明せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-4y^3}{x^2+7y^2} = 0$

（ヒント：(2) では分母を $x^2+7y^2 \geqq x^2+y^2$ と評価する．）

[2] 次の極限値は存在しないことを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

[3] $f(t)$ は微分可能な函数であるとする．$z := f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ が成り立つことを示せ．

[4] $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ のとき，$z_{xx} + z_{yy} = 0$ であることを示せ．

[5] $z = f(x,y)$，$x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ がすべて C^2 函数のとき，次式を示せ：

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

（$\frac{dz}{dt} = z_x x'(t) + z_y y'(t)$ において，z_x や z_y を t で微分する際に再び連鎖率を適用する．）

[6] 連鎖率を用いて，z_u, z_v を求めよ．

(1) $z = f(x,y)$ $(x = u^2+v^2,\ y = uv)$　　(2) $z = f(x,y)$ $(x = e^{u+v},\ y = e^{u-v})$．

[7] a を定数として，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とする．$z = f(x,y)$ に対して，次の式を u と v に関する偏微分で表せ（$f(x,y)$ はなめらかとする）．

(1) $(z_x)^2 + (z_y)^2$　　(2) $z_{xx} + z_{yy}$

[8] すべての $t > 0$ に対して $f(tx, ty) = t^m f(x,y)$（m は定数）が成り立つとき，次式を示せ．ただし $f(x,y)$ はなめらかであるとする．

(1) $xf_x + yf_y = mf$　　(2) $x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = m(m-1)f$

（t で微分して $t = 1$ とおく．）

[9] 次の曲面の点 P_0 における接平面と法線の方程式を求めよ．

(1) $z = (x+y)e^{-2x+y}$,　$\mathrm{P}_0(0,1,e)$　　(2) $z = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$,　$\mathrm{P}_0(1,1,0)$

以上