微分積分学 B・演習問題 2

(2011年11月25日配付・12月2日実施)

(担当：野村隆昭)

[1] 次の式を証明せよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y - 4y^3}{x^2 + 7y^2} = 0$$

(ヒント：(2) では分母を $x^2 + 7y^2 \geq x^2 + y^2$ と評価する.)

[2] 次の極限值は存在しないことを示せ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

[3] $f(t)$ は微分可能な函数であるとする. $z := f\left(\frac{y}{x}\right)$ のとき, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ が成り立つことを示せ.

[4] $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ のとき, $z_{xx} + z_{yy} = 0$ であることを示せ.

[5] $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ がすべて C^2 函数のとき, 次式を示せ:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

($\frac{dz}{dt} = z_x x'(t) + z_y y'(t)$ において, z_x や z_y を t で微分する際に再び連鎖率を適用する.)

[6] 連鎖率を用いて, z_u, z_v を求めよ.

$$(1) z = f(x, y) \quad (x = u^2 + v^2, y = uv) \quad (2) z = f(x, y) \quad (x = e^{u+v}, y = e^{u-v}).$$

[7] a を定数として, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とする. $z = f(x, y)$ に対して, 次の式を u と v に関する偏微分で表せ ($f(x, y)$ はなめらかとする).

$$(1) (z_x)^2 + (z_y)^2 \quad (2) z_{xx} + z_{yy}$$

[8] すべての $t > 0$ に対して $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ (m は定数) が成り立つとき, 次式を示せ. ただし $f(x, y)$ はなめらかであるとする.

$$(1) x f_x + y f_y = m f \quad (2) x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = m(m-1) f$$

(t で微分して $t = 1$ とおく.)

[9] 次の曲面の点 P_0 における接平面と法線の方程式を求めよ.

$$(1) z = (x + y)e^{-2x+y}, \quad P_0(0, 1, e) \quad (2) z = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3, \quad P_0(1, 1, 0)$$

以上