微分積分学 B・演習問題 1

（2011 年 10 月 20 日配付・10 月 27 日実施）　　　　（担当：野村隆昭）

[1] 次の変数分離形の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $xy' = y^2 - 1$ 　　　　$\left(y = \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}\right)$

(2) $y' = \tan x \tan y$ 　　　　$\left(\sin y = \frac{C}{\cos x}\right)$

[2] 次の 1 階線型微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' + 2xy = x^3$ 　　　　$\left(\frac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}\right)$

(2) $y' + y\sin x = e^{\cos x}$ 　　　　$\left(e^{\cos x}(x+C)\right)$

[3] 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ 　　　　$\left(\frac{1}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$

(2) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \ (a<b)$ 　　　　$\left(\frac{\pi(b-a)^2}{8}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} \ (0<a<1)$ 　　　　$\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\right)$

[4] 次の広義積分は収束することを示し，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 　　　　$\left(\frac{3\pi}{16}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 　　　　$\left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\right)$

[5] 次の広義積分は収束することを示し，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)}$ 　　　　$(\log 2)$

(2) $\displaystyle\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ 　　　　$(n!)$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 　　(Hint: $y = \sqrt{x^2-1}$ とおく.)　　$\left(\frac{\pi}{2}\right)$

[6] 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$ の値を求めよ． 　　　　$\left(\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}\right)$

$$\left(\text{Hint: } \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \text{ と見て計算する.}\right)$$

$\boxed{\text{裏面に続く}}$

[7]　m, n は自然数であるとする．次の等式を証明せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$

[8]　広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} |\sin x| \, dx$ は発散することを示せ．