

# 微分積分学 B・演習問題 1

(2011年10月21日配付・10月28日実施)

(担当：野村隆昭)

[1] 次の変数分離形の微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $xy' = y^2 - 1$   $(y = \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2})$

(2)  $y' = \tan x \tan y$   $(\sin y = \frac{C}{\cos x})$

[2] 次の1階線型微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $y' + 2xy = x^3$   $(\frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2})$

(2)  $y' + y \sin x = e^{\cos x}$   $(e^{\cos x}(x + C))$

[3] 次の定積分の値を求めよ.

(1)  $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$   $(\frac{1}{2} \log 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}})$

(2)  $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$  ( $a < b$ )  $(\frac{\pi(b-a)^2}{8})$

(3)  $\int_0^\pi \frac{dx}{1+a \cos x}$  ( $0 < a < 1$ )  $(\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}})$

[4] 次の広義積分は収束することを示し、その値を求めよ.

(1)  $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$   $(\frac{3\pi}{16})$

(2)  $\int_0^1 \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$   $(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4})$

[5] 次の広義積分は収束することを示し、その値を求めよ.

(1)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)}$   $(\log 2)$

(2)  $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $(n!)$

(3)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  (Hint:  $y = \sqrt{x^2-1}$  とおく.)  $(\frac{\pi}{2})$

[6] 広義積分  $\int_0^\infty e^{-x} |\sin x| dx$  の値を求めよ.  $(\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})})$

(Hint:  $\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$  と見て計算する.)

裏面に続く

[7]  $m, n$  は自然数であるとする. 次の等式を証明せよ.

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

[8] 広義積分  $\int_0^{\infty} |\sin x| \, dx$  は発散することを示せ.