

微分積分学 A・演習問題 3

(2011 年 7 月 15 日配布・7 月 22 日実施)

(担当：野村隆昭)

[1] 次の極限値を求めよ。ただし $a > 0$, $b > 0$ は定数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} ax - \sin^{-1} bx}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} (\log x) \log(1+x) \quad (a-b, 0)$$

[2] 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x \right)^x \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} x \log(\sin x) \quad (e^{-2/\pi}, 0)$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{\sin x}} \quad (4) \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x} \quad (x^x \text{ が } x \text{ の肩に乗っている}) \quad (1, 0)$$

[3] 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \left(\frac{4}{9}, e^{-1/2}\right)$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (1, -\frac{2}{3})$$

$$[4] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - (a \sin x + b \cos x + c \sin^2 x)}{x^3} = d \neq 0 \text{ が成り立つように定数 } a, b, c, d \text{ を定めよ。} \quad (d = \frac{1}{2})$$

[5] 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

$$(1) y = \frac{x}{(1-x)(2-x)} \quad (\text{Hint: まず部分分数に分解する})$$
$$(2) y = \sin^2 x \quad (\text{Hint: } \cos 2x \text{ で表す})$$
$$(3) y = x^3 \sin x \quad (\text{Leibniz の公式を適用する})$$

[6] (1) $f(x) = \tan^{-1} x$ は $(1+x^2)f'(x) = 1$ をみたすことに注意。この式の両辺を n 回微分することによって、次の等式を示せ。

$$(x^2 + 1)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(2) (1) の式を使って、 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

[7] $x > 0$ のとき、次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

裏面に続く

[8] 次の不定積分を計算せよ. (部分分数分解)

$$(1) \int \frac{2x-3}{(x-1)^2(x+3)} dx \quad \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{9}{16} \log|x-1| - \frac{9}{16} \log|x+3| \right)$$

$$(2) \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx \quad \left(\frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1}x \right)$$

$$(3) \int \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$\left(-\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)$$

[9] 次の不定積分を計算せよ.

$$(1) \int \sin^{-1}x dx \quad (\log x \text{ と同じように})$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} \quad (\text{分子の } 1 \text{ を } (1-x^4) + x^4 \text{ と見る})$$