微分積分学 A ・演習問題 2

（2011 年 6 月 10 日配布・6 月 17 日実施）　　　　　（担当：野村隆昭）

[演習１：4]　(1) $n \geqq 3$ のとき，$n^n < (n!)^2$ であることを示せ．

---

[1]　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+4}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

[2]　$x \to 0$ のとき，以下を示せ．

(1) $x^3+x^4=O(x^3)$　　(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x+x^2)=o(x^2)$

[3]　次の方程式を解け．

(1) $\cos^{-1}x=\tan^{-1}2$　　(2) $\sin^{-1}x+2\sin^{-1}\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　　(3) $\tan^{-1}x+2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$

[4]　次の等式を示せ．

(1) $-1 \leqq x < 1$ のとき，$\sin^{-1}x=2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\dfrac{\pi}{2}$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\tan^{-1}x$

(3) $x>0$ のとき，$\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\tan^{-1}\dfrac{1}{x+1}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x^2+x+1}$

[5]　次の式を証明せよ．

(1) $\sinh^{-1}y=\log(y+\sqrt{1+y^2}\,)$　　(2) $\cosh^{-1}y=\log(y+\sqrt{y^2-1}\,)$

(3) $\tanh^{-1}y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

[6]　次の函数の導函数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2}\,)\}$　　(2) $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$　　(3) x^x　$(x>0)$

[7]　次の函数の導函数を求めよ．ただし a は定数．

(1) $\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{x}\right)$　　(2) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)\right)$　$(a>0)$

[8]　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{\sinh x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(\tanh(x^2))}{x^2}$

裏面に続く

[9]　$(-\infty,\,\infty)$ で定義された函数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して，$f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたし，しかも $x = 0$ で連続であるとする．このとき，$f(x)$ はすべての実数 x で連続であることを示せ．

[10]　$(-\infty,\,\infty)$ で定義された函数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して，$f(x+y) = f(x)f(y)$ をみたし，しかも $x = 0$ で連続でかつ $f(0) \neq 0$ であるとする．このとき，$f(x)$ はすべての実数 x で連続であり，しかも $f(x) > 0$ であることを示せ．

[11]　$f(x)$ は閉区間 $I = [0,\,1]$ で連続な函数で，任意の $x \in I$ に対して，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ とする．このとき，$f(a) = \sin \dfrac{\pi a}{2}$ をみたす $a \in I$ が少なくとも 1 個存在することを示せ．