微分積分学 A・演習問題 1

（2011 年 5 月 12 日配布・5 月 19 日実施）　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　$a_1 = \sqrt{2}$，$a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$　$(n = 2, 3, \dots)$ で定まる数列について：
(1) 数列 $\{a_n\}$ は狭義単調増加であることを示せ．
(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < 2$ であることを示せ．
(3) $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

[2]　$a > 0$，$x_1 > \sqrt{a}$ であるとき，

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

によって数列 $\{x_n\}$ を定める．
(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n > \sqrt{a}$ であることを示せ．
(2) $x_n > x_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ であることを示せ．
(3) $\{x_n\}$ の極限値を求めよ．

[3]　次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値をそれぞれ求めよ．
(1) $a_1 = 2$，$a_n := \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + 1)$　$(n = 2, 3, \dots)$.
(2) $a_1 = 1$，$a_n = \dfrac{n}{n+1}\, a_{n-1}$　$(n = 2, 3, \dots)$.
(3) $a_1 > 0$，$a_n := \dfrac{2}{2 + a_{n-1}}$　$(n = 2, 3, \dots)$.
(4) $a_1 = 1$，$a_n = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$　$(n = 2, 3, \dots)$.

[3]　$a > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを示せ．
Hint: $a < n_0$ をみたす自然数 n_0 を一つ固定すると，$n > n_0$ のとき，

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n_0 + 1} \cdots \frac{a}{n} \leqq \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{a}{n_0 + 1}\right)^{n - n_0}$$

[4]　(1) $n \geqq 3$ のとき，$n^n < (n!)^2$ であることを示せ．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$ であることを示せ．

[5]　$a > 0$，$b > 0$ のとき，次の極限値を求めよ．
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n + 1}$,　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

裏面に続く

[**6**]　$0 < a \leqq b \leqq c$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n + c^n)^{1/n}$ を求めよ．
Hint: $c^n \leqq a^n + b^n + c^n \leqq 3c^n$ に注意.

[**7**]　次の (1)〜(3) はすべて誤りである．反例を与えよ．

(1) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n^2 = a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.