

微分積分学 A・演習問題 1

(2011 年 5 月 13 日配布・5 月 20 日実施)

(担当：野村隆昭)

[1] $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$) で定まる数列について：

- (1) 数列 $\{a_n\}$ は狭義単調増加であることを示せ.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < 2$ であることを示せ.
- (3) $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

[2] $a > 0$, $x_1 > \sqrt{a}$ であるとき,

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって数列 $\{x_n\}$ を定める.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n > \sqrt{a}$ であることを示せ.
- (2) $x_n > x_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) であることを示せ.
- (3) $\{x_n\}$ の極限値を求めよ.

[3] 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値をそれぞれ求めよ.

(1) $a_1 = 2$, $a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + 1)$ ($n = 2, 3, \dots$).

(2) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$).

(3) $a_1 > 0$, $a_n := \frac{2}{2 + a_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$).

(4) $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$).

[3] $a > 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを示せ.

Hint: $a < n_0$ をみたす自然数 n_0 を一つ固定すると, $n > n_0$ のとき,

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n_0 + 1} \cdots \frac{a}{n} \leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{a}{n_0 + 1} \right)^{n - n_0}$$

[4] (1) $n \geq 3$ のとき, $n^n < (n!)^2$ であることを示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} = \infty$ であることを示せ.

[5] $a > 0$, $b > 0$ のとき, 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^n + 1}$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

裏面に続く

[6] $0 < a \leq b \leq c$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{1/n}$ を求めよ.
Hint: $c^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3c^n$ に注意.

[7] 次の (1)~(3) はすべて誤りである. 反例を与えよ.

(1) $a > 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = a$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ である.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$.