§9. 不定積分

高校までのリストに付け加えるべき原始函数：

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x.$$

実際の局面では，次の形で使うことが多いが，係数 $\frac{1}{a}$ が付いたり付かなかったりするので，記憶だけに頼らずに，微分をして確かめる習慣をつけたい：

$a>0$ のとき

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

あるいは

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

などとする．

双曲線函数については下記の通り：

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x, \qquad \int \tanh x\,dx = \log(\cosh x).$$

例 9.1. 双曲線函数を使って計算してみよう．

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cosh x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(\sinh x)'}{\sinh^2 x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(\sinh x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

<u>高校の復習：</u>

(1) 置換積分 $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx.$

例 9.2. 例 9.1 ですでに使っている．別の置換で計算してみよう：

$e^x = t$ とおくと，$e^x\,dx = dt$ より

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1}t = \tan^{-1}(e^x).$$

一見すると例 9.1 と結果が違うようだが，実際は

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \tan^{-1}(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

となっていて，2 つの函数は定数の差しかない．

(2) 部分積分 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$

例 9.3. 逆三角函数の原始函数は部分積分で計算できる：

$$\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

<u>有理函数の原始函数：</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を考える（$f(x), g(x)$ は互いに素な実数係数の多項式）

（$f(x)$ の次数）$\geqq$（$g(x)$ の次数）のときは割り算を実行して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \;:\; q(x) \text{ は多項式で，（} r(x) \text{ の次数）} < \text{（} g(x) \text{ の次数）}$$

- $\displaystyle\int q(x)\,dx$ は高校の範囲．
- 従って，（$f(x)$ の次数）$<$（$g(x)$ の次数） の場合を考えれば十分．

$g(x)$ を因数分解して

$$g(x) = C\prod_{j=1}^{r}(x-\alpha_j)^{m_j}\prod_{k=1}^{s}(x^2+p_kx+q_k)^{n_k}.$$

ここで，$C, \alpha_j, p_k, q_k \in \mathbb{R}$，$m_j, n_k \in \mathbb{N}$ であって，$p_k^2-4q_k<0$ である．すなわち，α_j $(j=1,\ldots,r)$ は方程式 $g(x)=0$ の m_j 重の実数解で，方程式 $x^2+p_kx+q_k=0$ は実数解を持たない．

このとき，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は次のように部分分数分解が可能であることが証明できる：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_{j1}}{x-\alpha_j} + \frac{A_{j2}}{(x-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jm_j}}{(x-\alpha_j)^{m_j}}\right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{B_{k1}x+C_{k1}}{x^2+p_kx+q_k} + \frac{B_{k2}x+C_{k2}}{(x^2+p_kx+q_k)^2} + \cdots + \frac{B_{kn_k}x+C_{kn_k}}{(x^2+p_kx+q_k)^{n_k}}\right).$$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha_j)^l}$ $(l=1,2,\ldots)$ は容易に計算できるから，問題は，自然数 n に対する $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ $(p^2-4q<0)$ の計算．

$a := \sqrt{q-\frac{1}{4}p^2} > 0$ とおくと，$x^2+px+q = (x+\frac{1}{2}p)^2+a^2$ であるから，$t := x+\frac{1}{2}p$ とすると

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx = B\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt + \left(C-\frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

ここで，右辺の第１項については

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

より，容易に計算できる．

問題は

$$I_n := \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

まず，$n=1$ のときは，$I_1 = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$ である．$n \geqq 2$ のとき

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int t\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt.$$

ここで

$$\int t\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = -\frac{1}{2(n-1)}\,t\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

ゆえに

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right).$$

I_1 がわかっているので，この漸化式によって，I_n が帰納的に求まる．

例 9.4. (1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$.

部分分数展開は

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right).$$

従って

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\bigl(\log|x-1| - \log|x+2|\bigr) \\ &= \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|. \end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$．まず

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

両辺に $\dfrac{1}{x-1}$ をかけると

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

以下容易．

(3) $I = \displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^2+3}\,dx$.

割り算を実行すると

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+3} = x+2-\frac{3x+5}{x^2+3} = x+2-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3} - \frac{5}{x^2+3}.$$

従って

$$\begin{aligned} I &= \int\left(x+2-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3} - \frac{5}{x^2+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\log(x^2+3) - \frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

部分分数を愚直に求めるしかない．

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

教科書にあるようにして，

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{4x+7}{25(x^2+2x+2)}$$

そして

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{4x+4}{x^2+2x+2}\,dx + 3\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= 2\log(x^2+2x+2) + 3\tan^{-1}(x+1). \end{aligned}$$

(5) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ であるから，部分分数に分解すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\Bigl(x-\frac{1}{2}\Bigr). \end{aligned}$$