§9. 陰函数の極値と条件付極値問題

例 9.1. $F(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy = 0$ から定まる陰函数 $f(x)$ の極値について.

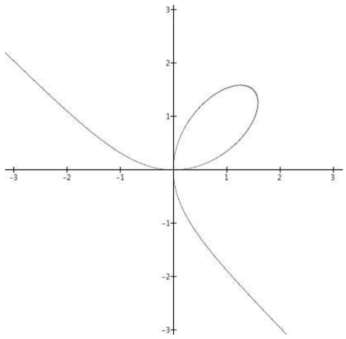

図 1. 曲線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$：デカルトの正葉線

$x = a$ で $f(x)$ が極値をとるとする. ただし $F_y(a,b) \neq 0$ $(b := f(a))$ とする. このとき, $f'(a) = 0$ である. $F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0.$$

$x = a$ とおくと, $F_x(a,b) + f_y(a,b) f'(a) = 0$. ここで $f'(a) = 0$ より, $F_x(a,b) = 0$.
$F_x = 3x^2 - 3y$ であるから, $F_x(a,b) = 0 \iff a^2 - b = 0$. すなわち $b = a^2$.
$F(a,b) = 0$ に代入すると

$$0 = a^3 + (a^2)^3 - 3aa^2 = a^3(a^3 - 2).$$

ゆえに $a = 0, \sqrt[3]{3}$. ここで $F_y = 3y^2 - 3x$.
(i) $a = 0$ のときは $b = 0$ となるが, $F_y(0,0) = 0$ なので除外される.
(ii) $a = \sqrt[3]{2}$ のとき, $b = \sqrt[3]{4}$ であり, $F_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 3\sqrt[3]{2} \neq 0$ である.
先週の計算より, $f''(x) = \dfrac{2xf(x)}{(x - f(x)^2)^3}$ であったから,

$$f''(\sqrt[3]{2}) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3} = -2 < 0.$$

ゆえに $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$ は極大値である.

定理 9.2. $F(x,y)$：なめらか. $F(a,b) = 0$ かつ $F_y(a,b) \neq 0$ と仮定.
このとき, $F(x,y) = 0$ から $f(a) = b$ をみたす陰函数 $y = f(x)$ が決まるが, $f(x)$ が $x = a$ で極値をとれば
(1) $F_x(a,b) = 0$ である.
(2) $\dfrac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)} > 0$ ならば $b = f(a)$ は極大値であり, $\dfrac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)} < 0$ ならば $b = f(a)$ は極小値である.

証明． (2) のみ検証する．先週の定理から，

$$f''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}.$$

$x = a$ とおくと，$F_x(a,b) = 0$ より

$$f''(a) = -\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}.$$

従って，$f''(a) \lesseqgtr 0 \iff \dfrac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)} \gtreqless 0$ ということから (2) の主張が示される． □

条件付き極値問題：$G(x,y) = 0$ という条件下で函数 $F(x,y)$ の極大極小を求める．以下 $F(x,y)$，$G(x,y)$ はなめらかであるとする．

定理 9.3. $G_x(x,y) \neq 0$ または $G_y(x,y) \neq 0$ が成り立っているとする．
条件 $G(x,y) = 0$ のもとで函数 $F(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとる
$\implies \exists\lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $F_x(a,b) + \lambda G_x(a,b) = 0, \quad F_y(a,b) + \lambda G_y(a,b) = 0.$

注意 9.4. 3 変数函数 $L(x,y,\lambda) := F(x,y) + \lambda G(x,y)$ を考えると，$G(a,b) = 0$ と定理の結論は

$$L_x(a,b,\lambda) = 0, \quad L_y(a,b,\lambda) = 0, \quad L_\lambda(a,b,\lambda) = 0$$

という式で表される．変数を増やすこの λ のことを，**Lagrange** の乗数と呼ぶ．

証明． (1) $G_y(a,b) \neq 0$ のとき．
陰函数定理より，$x = a$ の近くで，$G(x,y) = 0$ から，$f(a) = b$ をみたして $y = f(x)$ と解ける．$h(x) := F(x, f(x))$ とおくと，$h(x)$ は $x = a$ で極値をとるので $h'(a) = 0$．ここで，$h'(x) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, \varphi(x)) f'(x)$ より

$$F_x(a,b) + F_y(a,b) f'(a) = 0. \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

一方，$G(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分して $G_x(x, f(x)) + G_y(x, f(x)) f'(x) = 0$．ゆえに $f'(a) = -\dfrac{G_x(a,b)}{G_y(a,b)}$．上の $(*)$ に代入すると

$$F_x(a,b) - F_y(a,b)\frac{G_x(a,b)}{G_y(a,b)} = 0.$$

$\lambda := -\dfrac{F_y(a,b)}{G_y(a,b)}$ とおけば，$\nabla F(a,b) + \lambda \nabla G(a,b) = (0,0)$ となる．
(2) $G_x(a,b) \neq 0$ のとき．
$G(x,y) = 0$ より，$x = g(y)$ と解いて議論する（詳細は省略）． □

参考：記号は定理の通りとし，$L_x(a,b,\lambda) = L_y(a,b,\lambda) = L_\lambda(a,b,\lambda) = 0$ とする．このとき

$$\det \begin{pmatrix} 0 & G_x(a,b) & G_y(a,b) \\ G_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ G_y(a,b) & L_{xy}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{resp.} < 0).$$

$\Longrightarrow$ $f(a,b)$ が極大値（resp. 極小値）

例 **9.5.**　$x^2 + xy + y^2 = 1$ のときの $F(x,y) = x^2 + y^2$ の極値について．

$G(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおき，$L(x,y,\lambda) := x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とする．$L_x = 2x + 2\lambda x + \lambda y$, $L_y = 2y + \lambda x + 2\lambda y$ であるから，$L_x = L_y = L_\lambda = 0$ より

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)x + \lambda y = 0 & ① \\ \lambda x + 2(1+\lambda)y = 0 & ② \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 & ③ \end{cases}$$

連立方程式①②において，係数行列式 $= 4(1+\lambda)^2 - \lambda^2 = 3\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (3\lambda+2)(\lambda+2)$.

• $\lambda \neq -2, -\frac{2}{3}$ のとき．係数行列式が 0 でないので，連立方程式①②をみたす (x,y) は $(0,0)$ のみであるが，これは③ をみたさない．

• ゆえに $\lambda = -2$ or $-\frac{2}{3}$.

(i) $\lambda = -2$ のとき．①より $x + y = 0$．これより出る $y = -x$ を③に代入して $x^2 = 1$. ゆえに $(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$.

(ii) $\lambda = -\frac{2}{3}$ のとき．①より $x - y = 0$．これより出る $y = x$ を③に代入して $3x^2 = 1$. ゆえに $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$.

以下これらの点で実際に $F(x,y)$ が極値をとるかどうか調べよう．
まず $G_y = x + 2y$ より，$G_y = 0 \iff x = -2y$ であるから

$$G_y(\pm 1, \mp 1) \neq 0, \qquad G_y(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0.$$

従って，いずれの点の近傍でも $G(x,y) = 0$ から $y = f(x)$ と解けることに注意.
$x^2 + xf(x) + f(x)^2 = 1$ の両辺を x で微分して $2x + f(x) + xf'(x) + 2f(x)f'(x) = 0$. ゆえに

$$(x + 2f(x))f'(x) = -2x - f(x). \quad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ の両辺をさらに x で微分して $(1 + 2f'(x))f'(x) + (x + 2f(x))f''(x) = -2 - f'(x)$. すなわち

$$(x + 2f(x))f''(x) = -2(1 + f'(x) + f'(x)^2). \quad \cdots\cdot (**)$$

一方 $h(x) := x^2 + f(x)^2$ とおくと，$h'(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$，さらに x で微分して

$$h''(x) = 2 + 2f'(x)^2 + 2f(x)f''(x). \quad \cdots\cdots (***)$$

(i) $(x,y)=(\pm 1,\mp 1)$ のとき．
$(*)$ で $x=\pm 1$ とおくと，$f(\pm 1)=\mp 1$ より，$f'(\pm 1)=1$.
次に $(**)$ で $x=\pm 1$ を代入して，$f''(\pm 1)=\pm 6$.
ゆえに $(***)$ より，$h''(\pm 1)=4-12=-8<0$．よって $h(\pm 1)=2$ は極大値.
(ii) $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ のとき．
$(*)$ で $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入して，$f'(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=-1$.
次に $(**)$ で $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入して，$f''(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$.
ゆえに $(***)$ より，$h''(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{8}{3}>0$．よって $f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{3}$ は極小値.

例 9.6.　先の例で，$G(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ のときの $F(x,y)=x^2+y^2$ の最大，最小について考える．
まず曲線 $G(x,y)=0$ は有界閉集合であることに注意する．従って，この曲線上で $F(x,y)$ は必ず最小値と最大値をとる．
$G(a,b)=0$ とし，$F(a,b)$ が最大，または最小値であるとする．
$G_y(a,b)\neq 0$ または $G_x(a,b)\neq 0$ をみたしていたら，先の議論を行う．
あとは可能性として，$G_y(a,b)=0$ かつ $G_x(a,b)=0$ となる点で最大・最小値が起こっている場合がある．
ところが,

$$G_y(a,b)=a+2b, \qquad G_x(a,b)=2a+b$$

なので $G_y(a,b)=G_x(a,b)=0$ から $(a,b)=(0,0)$ が出るが，原点は曲線 $G(x,y)=0$ 上にない．ゆえに最大値・最小値は，Lagrange の乗数法から出てくる極値をとる点の候補者の所でとることになる．

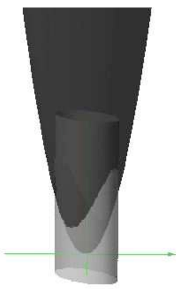

図 2. 楕円筒 $x^2+xy+y^2=1$ と $z=x^2+y^2$ が交じわってできる曲線が $x^2+xy+y^2=1$ に変数 (x,y) を制限したときの $z=x^2+y^2$ の値の変化を表している．