§8．陰函数

$F(x,y)$：2 変数函数．
方程式 $F(x,y)=0$ から定まる変数 x と y の関係 $y=f(x)$ （あるいは $x=g(y)$）のことを，$F(x,y)=0$ から定まる陰函数 (implicit function) という．このとき，恒等的に $F(x,f(x))=0$（あるいは $F(g(y),y)=0$）が成り立つ．

例 8.1． $F(x,y)=x^2+y^2-1$ のとき，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$ が $F(x,y)=0$ から定まる陰函数．

注意 8.2． $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (x\in\mathbb{Q})\\ -\sqrt{1-x^2} & (x\notin\mathbb{Q})\end{cases}$ も，恒等的に $F(x,f(x))=0$ をみたすが，陰函数を考えるとき，普通は元々の $F(x,y)$ の連続性，微分可能性に見合った性質を要求する．たとえば，$F(x,y)$ が連続なら陰函数も連続，$F(x,y)$ が連続的微分可能ならば陰函数も連続的微分可能というように．

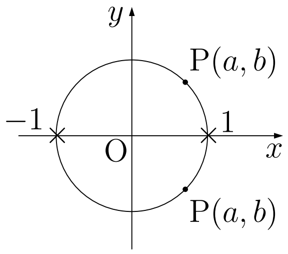
定理 8.3 (陰函数定理)**．** $F(x,y)$ は C^1 級で，$F(a,b)=0$ かつ $F_y(a,b)\neq 0$ とする．このとき，$\exists f(x)$：$x=a$ の近くで定義された函数 s.t.
(1) $f(a)=b$ かつ恒等的に $F(x,f(x))=0$，
(2) $f(x)$ は C^1 級で，$f'(x)=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$．

注意 8.4． 実際この定理を使おうとするときは，$F(x,f(x))=0$ より，両辺を x で微分して

$$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0.$$

これより，$f'(x)=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$ を得る．ここで $F_y(a,f(a))=F_y(a,b)\neq 0$ であるから，$x=a$ の近くで $F_y(x,f(x))\neq 0$ であることに注意．

例 8.5． 例 8.1 に戻ろう．$F_y=2y$ であるから，$F_y(a,b)\neq 0 \iff b\neq 0$．
従って，定理の条件は，$a^2+b^2=1$ かつ $b\neq 0$．すなわち，(a,b) は $(\pm 1,0)$ 以外の円周上の点である．$b>0$ のときは $b=\sqrt{1-a^2}$ であり，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ が定理にいう陰函数である．$b<0$ のときは，$b=-\sqrt{1-a^2}$ であり，$f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ が定理にいう陰函数である．



$\mathrm{P}(a,b) \quad (b>0) \qquad \rightsquigarrow \qquad y=\sqrt{1-x^2}$

$\mathrm{P}(a,b) \quad (b<0) \qquad \rightsquigarrow \qquad y=-\sqrt{1-x^2}$

注意 8.6. 例 8.5 で，$F_y(a,b)=0$ の場合，すなわち $(a,b)=(\pm 1,0)$ のとき．
たとえば，$x=1$ の近くでは，C^1 級函数として，$f(1)=0$ かつ $y=f(x)$ というように一意に解くことはできない．ただし，$F_x(\pm 1,0)=\pm 2\neq 0$ であるから，$x=g(y)$ とは解ける．

定理 8.7. 定理 8.3 において，$F(x,y)$ が C^2 級ならば，定理の $f(x)$ も C^2 級であって，

$$f''(x)=-\frac{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{F_y^3}.$$

ここで，右辺は変数の部分 $(x,f(x))$ を省略してあって，正確には

$$F_{xx}=F_{xx}(x,f(x)),\qquad F_{xy}=F_{xy}(x,f(x)),\qquad F_{yy}=F_{yy}(x,f(x)),$$
$$F_x=F_x(x,f(x)),\qquad F_y=F_y(x,f(x)).$$

注意 8.8. $f(x)$ が C^2 級であることを認めてしまうと，次のような計算でよい．
$f'(x)=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f''(x)&=-\frac{1}{F_y^2}\{(F_{xx}+F_{xy}y')F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}y')\}\\&=-\frac{1}{F_y^2}\left\{F_{xx}F_y-F_{xy}F_x-F_xF_{yx}+F_xF_{yy}\frac{F_x}{F_y}\right\}\\&=-\frac{1}{F_y^3}\{F_{xx}F_y^2-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}\}.\end{aligned}$$

例 8.9. $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$ のとき，$F(x,y)=0$ から定まる陰函数 $y=f(x)$ に対して $f'(x)$，$f''(x)$ を求める．

y を x の函数と見て，$x^3+y^3-3xy=0$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0.$$

これより $(y^2-x)y'=y-x^2$．ゆえに

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.\quad\cdots\cdots(1)\qquad \text{（あるいは } f'(x)=\frac{f(x)-x^2}{f(x)^2-x}\text{ と書いてもよい．）}$$

さらに (1) を x で微分して

$$y''=\frac{1}{(y^2-x)^2}\{(y'-2x)(y^2-x)-(y-x^2)(2yy'-1)\}.$$

ここで (1) より

$$y' - 2x = \frac{y - x^2}{y^2 - x} - 2x = \frac{x^2 - 2xy^2 + y}{y^2 - x},$$
$$2yy' - 1 = \frac{2y(y - x^2)}{y^2 - x} - 1 = \frac{x - 2x^2y + y^2}{y^2 - x}$$

であるから

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{(y^2 - x)^3}\{(x^2 - 2xy^2 + y)(y^2 - x) - (y - x^2)(x - 2x^2y + y^2)\} \\ &= \frac{2xy(3xy - x^3 - y^3 - 1)}{(y^2 - x)^3} = \frac{2xy}{(x - y^2)^3} \qquad (\because x^3 + y^3 = 3xy). \end{aligned}$$

注意 8.10. $F_y = 3y^2 - 3x$ であるから，実際には $F_y(a, b) \neq 0$，すなわち $a \neq b^2$ のときに，$x = a$ の近傍で $f(a) = b$ となるなめらかな函数 $f(x)$ が定まって，$F(x, f(x)) = 0$ となり，$f'(x) = \dfrac{f(x) - x^2}{f(x)^2 - x} \cdots\cdots (*)$ をみたしているのである．
式 $(*)$ において，$x = a$ のときの分母が $f(a)^2 - a = b^2 - a \neq 0$ なので，連続性により，$x = a$ の近くで $f(x)^2 - x \neq 0$ となっている．このような考察が上の計算では省かれている（常に同じ理由なので普通省かれるということである：注意 8.4 の計算参照）．

例 8.11. $F(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y - 10 = 0$ から定まる陰函数 $y = f(x)$ について：

y を x の函数と見て，$2x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y - 10 = 0$ の両辺を x で微分して

$$4x + y + xy' + 2yy' - 2 + 3y' = 0.$$

これより $(x + 2y + 3)y' = -4x - y + 2$．すなわち

$$y' = -\frac{4x + y - 2}{x + 2y + 3}$$

この両辺を再び x で微分して

$$y'' = -\frac{1}{(x + 2y + 3)^2}\{(4 + y')(x + 2y + 3) - (4x + y)(1 + 2y')\}.$$

ここで

$$4 + y' = 4 - \frac{4x + y - 2}{x + 2y + 3} = \frac{7y + 14}{x + 2y + 3},$$
$$1 + 2y' = 1 - \frac{8x + 2y - 4}{x + 2y + 3} = \frac{-7x + 7}{x + 2y + 3}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
y'' &= -\frac{7}{(x+2y+3)^3}\{(y+2)(x+2y+3)+(4x+y)(x-1)\} \\
&= -\frac{7(4x^2+2xy+2y^2-2x+6y+6)}{(x+2y+3)^3} \\
&= -\frac{14(x+13)}{(x+2y+3)^3} \qquad (\because 4x^2+2xy+2y^2=4x-6y+20)
\end{aligned}
$$

例 8.12. $F(x,y)=x+y-\tan(xy)$ とおくと，$F_y=1-\dfrac{x}{\cos^2(xy)}$．ゆえに $F_y(0,0)=1\neq 0$ であるから，$x=0$ の近くで定義された函数 $y=f(x)$ で，$f(0)=0$ かつ $F(x,f(x))=0$ となるものがある．$x+f(x)=\tan(xf(x))$ の両辺を x で微分すると

$$
1+f'(x)=\frac{f(x)+xf'(x)}{\cos^2(xf(x))}.
$$

$x=0$ とおくことにより，$f'(0)=-1$ を得る．

定理 8.13. $\operatorname{grad} F(a,b)\neq 0$ とする．このとき，曲線 $F(x,y)=0$ 上の点 (a,b) における接線の方程式は $F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$ である．

証明. 仮定より，$F_x(a,b)\neq 0$ または $F_y(a,b)\neq 0$ である．

（あ）$F_y(a,b)\neq 0$ のとき： $x=a$ の近くで $\exists y=f(x)$ s.t. $f(a)=b$ かつ $F(x,f(x))=0$．この両辺を x で微分して $F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0$．この式で $x=a$ とおいて，$f'(a)=-\dfrac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$ を得る．ゆえに接線の方程式は

$$
y-b=-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}(x-a).
$$

分母を払うと定理の主張の式になる．

（い）$F_x(a,b)\neq 0$ のとき： $y=b$ の近くで，$\exists x=g(y)$ s.t. $g(b)=a$ かつ $F(g(y),y)=0$．この両辺を y で微分して $F_x(g(y),y)g'(y)+F_y(g(y),y)=0$．この式で $y=b$ とおいて，$g'(b)=-\dfrac{F_y(a,b)}{F_x(a,b)}$ を得る．ゆえに接線の方程式は

$$
x-a=-\frac{F_y(a,b)}{F_x(a,b)}(y-b).
$$

分母を払えば，定理の主張の式になる． □

例 8.14. 円 $x^2+y^2=1$ の点 (a,b) における接線の方程式について：
$F(x,y):=x^2+y^2-1$ とおくと，$F_x=2x$，$F_y=2y$ より，点 (a,b) における接線の方程式は $2a(x-a)+2b(y-b)=0$．ここで $a^2+b^2=1$ より，方程式は $ax+by=1$ となる．