§7．2変数の函数の極値問題

$f(x,y)$：領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された函数（なめらかな函数とする）.

定義 7.1.　$f(x,y)$ が点 $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極大である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(x,y)$ は点 P_0 の近くで狭義の最大値をとる

$$(\exists\delta > 0 \text{ s.t. } 0 < \rho(\mathrm{P},\mathrm{P}_0) < \delta \implies f(\mathrm{P}) < f(\mathrm{P}_0))\ .$$

$f(\mathrm{P})$ を函数 $f(x,y)$ の極大値と呼ぶ.

極小値についても同様に定義する.

定理 7.2.　$f(x,y)$ が点 $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極大または極小 $\implies$ $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

証明.　函数 $x \mapsto f(x,b)$ が $x = a$ で極値をとることから $f_x(a,b) = 0$．同様に函数 $y \mapsto f(a,y)$ が $y = b$ で極値をとることから $f_y(a,b) = 0$.　□

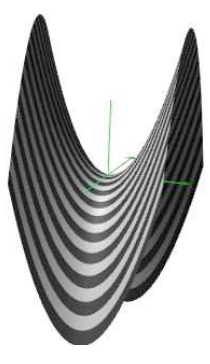
この定理の逆が成り立たないことは 1 変数のときと同じであるが，1 変数のときでは起こらなかったことが 2 変数では起こる.

例 7.3.　函数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ を考えてみる.

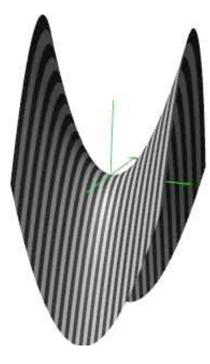
$f_x = 2x$，$f_y = -2y$ より，$f_x = f_y = 0 \iff x = y = 0$.

従って $f(x,y)$ が極値をとるなら原点以外にはない．しかし $f(x,0) = x^2$，$f(0,y) = -y^2$ であるから，$x \mapsto f(x,0) = x^2$ は $x = 0$ で極小，しかし $y \mapsto f(0,y) = -y^2$ は $y = 0$ では極大である．よって $f(0,0) = 0$ は $f(x,y)$ の極大値でも極小値でもない.

実際，曲面 $z = f(x,y)$ は下のようになる.



y を固定 $\implies z = x^2 - y^2$ は下に凸



x を固定 $\implies z = -y^2 + x^2$ は上に凸

- ある方向には極大点であり，別のある方向には極小点になっているような点を，鞍点（あんてん; saddle point）または峠点と呼ぶ.

● 1 変数のとき：

定理 7.4.　なめらかな函数 $f(x)$ について，$f'(a)=0$ と仮定する．
(1) $f''(a)<0 \implies f(x)$ は $x=a$ で極大値をとる．
(2) $f''(a)>0 \implies f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．

証明.　Taylor の定理と $f'(a)=0$ より，$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$．
$f(x)$ はなめらかなので，h が十分小さければ，$f''(a)$ と $f''(a+\theta h)$ は同符号である．
よって (1), (2) が成り立つ．　$\square$

● 2 変数函数 $f(x,y)$ に戻ろう．

定義 7.5.　次で定義される行列 $H_f(x,y)$ を函数 $f(x,y)$ のヘッセ行列という：

$$H_f(x,y):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y)\\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}$$

$f(x,y)$ はなめらかなので，$H_f(x,y)$ は実対称行列（$(1,2)$ 成分 $=$ $(2,1)$ 成分）であることに注意．また $H_f(x,y)$ の行列式 $\det H_f(x,y)$ を函数 $f(x,y)$ の **Hessian** という．

定理 7.6.　なめらかな $f(x,y)$ について，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ と仮定する．
(1) $f_{xx}(a,b)>0$ かつ $\det H_f(a,b)>0 \implies f(a,b)$ は極小値．
(2) $f_{xx}(a,b)<0$ かつ $\det H_f(a,b)>0 \implies f(a,b)$ は極大値．
(3) $\det H_f(a,b)<0 \implies f(a,b)$ は極大でも極小でもない（鞍点）．
(4) (1)〜(3) 以外の場合はこの方法では極大・極小の判定はできない．

注意 7.7.　(1) 実対称行列 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ の固有値は 2 個とも必ず実数である．
$\because$ E を単位行列，λ をスカラーとすると，

$$\begin{aligned}\det(\lambda E-T)&=\det\begin{pmatrix}\lambda-A & -B\\ -B & \lambda-C\end{pmatrix}=(\lambda-A)(\lambda-C)-B^2\\ &=\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2\end{aligned}$$

より，T の固有方程式は $\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2=0 \cdots\cdots (*)$　となる．従って，2 次方程式 $(*)$ の判別式は $(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A-C)^2+4B^2 \geqq 0$．//

$$(2)\ \begin{cases}\text{実対称行列 } T \text{ が正定値である} \overset{\text{def}}{\iff} T \text{ の 2 個の固有値は共に正.}\\[2ex] \text{実対称行列 } T \text{ が負定値である} \overset{\text{def}}{\iff} T \text{ の 2 個の固有値は共に負.}\end{cases}$$

(3) $T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ の固有方程式 $(*)$ において，2解の和 $= A+C$，2解の積 $= AC-B^2$．
ゆえに
T が正定値 $\iff A+C>0$ かつ $AC-B^2>0 \iff A>0$ かつ $AC-B^2>0$．
（注意：$AC>B^2$ ならば $AC>0$ であり，A と C は同符号である．）

以上より，定理 7.6 を言い換えると

定理 7.8.　$\mathrm{grad} f(a,b)=0$ とする．
(1) ヘッセ行列 $H_f(a,b)$ が正定値 $\implies f(a,b)$ は極小値．
(2) ヘッセ行列 $H_f(a,b)$ が負定置 $\implies f(a,b)$ は極大値．
(3) ヘッセ行列の固有値が異符号 $\implies f(a,b)$ は極値ではない．
(4) (1)〜(3) 以外の場合はこの方法では判定できない．

例 7.9.　$f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2x-8y+5$ について．
$f_x=2x+4y-2$，$f_y=4x+10y-8$ であるから

$$f_x=f_y=0 \iff \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x+5y-4=0 \end{cases}$$

これを解いて $(x,y)=(-3,2)$ を得る．$f_{xx}=2$，$f_{xy}=4$，$f_{yy}=10$ であるから，$f(x,y)$ のヘッセ行列は定数行列で，$H_f=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$．ゆえに，$\det H_f=20-16=4>0$ で，$f_{xx}=2>0$ より，$f(-3,2)=0$ は極小値である．

例 7.10.　$f(x,y)=3x^2-4xy+y^2+10x-4y+3$ について．
$f_x=6x-4y+10$，$f_y=-4x+2y-4$ より

$$f_x=f_y=0 \iff \begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ 2x-\ \ y+2=0 \end{cases}$$

これを解いて $(x,y)=(1,4)$ を得る．$f_{xx}=6$，$f_{xy}=-4$，$f_{yy}=2$ であるから，$H_f=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ となる．よって $\det H_f=12-16=-4<0$．ゆえに $f(x,y)$ は極値を持たない．

例 7.11.　$f(x,y)=xy-x^3y-xy^3$ について．
$f_x=y-3x^2y-y^3$，$f_y=x-x^3-3xy^2$ より，

$$f_x=f_y=0 \iff \begin{cases} y(3x^2+y^2-1)=0 \cdots\cdots (1) \\ x(x^2+3y^2-1)=0 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) より $y=0$ または $3x^2+y^2=1$．

（あ）$y=0$ のとき．(2) より $x(x^2-1)=0$．ゆえに $x=0,\pm 1$.

（い）$3x^2+y^2=1$ のとき．$y^2=1-3x^2$ を (2) に代入して 2 で割ると，$x(1-4x^2)=0$. これより $x=0,\pm\dfrac{1}{2}$ を得る．$x=0$ ならば $y=\pm 1$ であり，$x=\pm\dfrac{1}{2}$ ならば $y=\pm\dfrac{1}{2}$（複号順は任意）.

以上より

$$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\ (\pm 1,0),\ (0,\pm 1),\ \left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)\text{（複号順任意）}.$$

$f_{xx}=-6xy$，$f_{xy}=1-3x^2-3y^2$，$f_{yy}=-6xy$ より

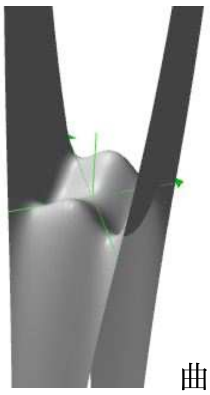
$$H_f=\begin{pmatrix}-6xy & 1-3x^2-3y^2\\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy\end{pmatrix}.$$

(a) $(x,y)=(0,0)$ のとき． $H_f(0,0)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ であり，$\det H_f(0,0)=-1<0$ であるから，$f(0,0)=0$ は極値ではない.

(b) $(x,y)=(\pm 1,0),\,(0,\pm 1)$ のとき． $H_f(\pm 1,0)=\left(\begin{smallmatrix}0&-2\\-2&0\end{smallmatrix}\right)$ であり，$\det H_f(\pm 1,0)=-4<0$ より，$f(\pm 1,0)=f(0,\pm 1)=0$ は極値ではない.

(c) $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$（複号同順）のとき． $H_f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ であり，$\det H_f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0$ かつ $f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ は極大値.

(d) $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$（複号同順）のとき． $H_f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ であり，$\det H_f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=2>0$ かつ $f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$ は極小値.



曲面 $z=xy-x^3y-xy^3$