## §6. 偏微分（続き）

**例 6.1.** $z=f(x,y)$（$C^2$ 級），$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とする．

(1) $z_x^2+z_y^2=z_r^2+\dfrac{1}{r^2}z_\theta^2$.

**証明.** 実際，連鎖律を使うと

$$\begin{aligned} z_r &= z_x x_r + z_y y_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta, \\ z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = z_x(-r\sin\theta)+z_y(r\cos\theta). \end{aligned} \tag{6.1}$$

ゆえに

$$z_r^2+\frac{1}{r^2}z_\theta^2=(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)^2+(-z_x\sin\theta+z_y\cos\theta)^2=z_x^2+z_y^2.$$

この例において，$z_x^2+x_y^2$ を書き直すということで計算を行うと次のようになる（実際の場面で数学を使うときはこのような状況の方が多いと思う）．

(6.1)を書き直すと

$$(z_r,z_\theta)=(z_x,z_y)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

であるから

$$(z_x,z_y)=(z_r,z_\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=(z_r,z_\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$z_x=z_r\cos\theta-\frac{1}{r}z_\theta\sin\theta,\qquad z_y=z_r\sin\theta+\frac{1}{r}z_\theta\cos\theta.$$

これより $z_x^2+z_y^2=z_r^2+\dfrac{1}{r^2}z_\theta^2$ が出る．

(2) $z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$.

**証明.** 連鎖律より

$$\begin{aligned} z_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r}(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta) \\ &= (z_{xx}x_r+z_{xy}y_r)\cos\theta+(z_{yx}x_r+z_{yy}y_r)\sin\theta \\ &= (z_{xx}\cos\theta+z_{xy}\sin\theta)\cos\theta+(z_{yx}\cos\theta+z_{yy}\sin\theta)\sin\theta \\ &= z_{xx}\cos^2\theta+2z_{xy}\cos\theta\sin\theta+z_{yy}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(-rz_x\sin\theta+rz_y\cos\theta) \\ &= -r(z_{xx}x_\theta+z_{xy}y_\theta)\sin\theta-rz_x\cos\theta+r(z_{yx}x_\theta+z_{yy}y_\theta)\cos\theta-rz_y\sin\theta \\ &= r^2z_{xx}\sin^2\theta-2r^2z_{xy}\cos\theta\sin\theta+r^2z_{yy}\cos^2\theta-rz_r. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}=(z_{xx}+z_{yy})(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=z_{xx}+z_{yy}.$$

<u>例 **6.1** の応用</u>： $z=f(x,y)$ が $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみの函数として $z=g(r)$ と表される $\iff$ $yf_x=xf_y$.

$$\begin{aligned}\because z \text{ が } \theta \text{ に依らない} \iff\ & z_\theta=0 \iff rz_x\sin\theta=rz_y\cos\theta \quad (\text{by } (6.1))\\ \iff\ & yf_x=xf_y.\end{aligned}$$

<u>2 変数函数に対する **Taylor** の定理</u>

$f(x,y)$：十分になめらか（$C^n$ 級，$n$ は十分大）.

$g(t):=f(a+th,\,b+tk)$ （$t\in\mathbb{R}$，$a,b,h,k$ は定数）とおくとき，$g(t)$ の第 $r$ 次導函数について計算してみよう.

$$\begin{aligned}g'(t)&=h\,f_x(a+th,\,b+tk)+k\,f_y(a+th,\,b+tk),\\ g''(t)&=h\bigl\{hf_{xx}(a+th,\,b+tk)+kf_{xy}(a+th,\,b+tk)\bigr\}\\ &\qquad\qquad+k\bigl\{hf_{yx}(a+th,\,b+tk)+kf_{yy}(a+th,\,b+tk)\bigr\}\\ &=h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}.\end{aligned}$$

簡単のため，最後の行では変数を書くのをサボっている．一般に帰納法を使うことにより

$$g^{(r)}(t)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^{r-j}k^j\,\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j}\partial y^j}(a+th,\,b+tk) \tag{6.2}$$

であることが証明できる．式 (6.2)を

$$g^{(r)}(t)=\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f\,(a+th,\,b+tk)$$

と書く．本来は右辺で括弧がもう一つあって，

$$\left(\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f\right)(a+th,\,b+tk)$$

であるが，煩わしいので省略してある．$\left(h\,\dfrac{\partial}{\partial x}+k\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^r$ を形式的に 2 項展開して

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^{r-j}k^j\,\frac{\partial^{r-j}}{\partial x^{r-j}}\frac{\partial^j}{\partial y^j}=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^{r-j}k^j\,\frac{\partial^r}{\partial x^{r-j}\partial y^j}$$

と見ているのである．あるいは，$\boldsymbol{h}:=(h,k)$，$\mathrm{grad}:=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ を使って

$$g^{(r)}(t)=\langle\,\boldsymbol{h},\,\mathrm{grad}\,\rangle^r f\,(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})\qquad(\boldsymbol{a}=(a,b))$$

とも書かれる．ここでも $\langle\,\boldsymbol{h},\,\mathrm{grad}\,\rangle^r f\,(\boldsymbol{a})$ は $\bigl(\langle\,\boldsymbol{h},\,\mathrm{grad}\,\rangle^r f\bigr)(\boldsymbol{a})$ の意味である.

**定理 6.2.**　なめらかな函数 $f(x,y)$ に対して，次式が成り立つ：

$$f(a+h,\,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f\,(a,b)$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f\,(a+\theta h,\,b+\theta k)\qquad (0<\theta<1).$$

**証明.**　$g(t)=f(a+th,\,b+tk)$ に 1 変数函数の Taylor の定理を適用して

$$g(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(0)}{j!}\,t^j+\frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!}\,t^n.$$

ここで $t=1$ とおく．そうすると先の計算により

$$g^{(j)}(0)=\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f\,(a,b)$$
$$g^{(n)}(\theta)=\left(h\,\frac{\partial}{\partial x}+k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f\,(a+\theta h,\,b+\theta k).$$

そして $g(1)=f(a+h,\,b+k)$ である．　□

**注意 6.3.**　定理 6.2 の公式の別の書き方として

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\langle\,\boldsymbol{h},\,\mathrm{grad}\,\rangle^{j} f\,(\boldsymbol{a})+\frac{1}{n!}\langle\,\boldsymbol{h},\,\mathrm{grad}\,\rangle^{n} f\,(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}).$$

**例 6.4.**　$f(x,y)=2x^2+3xy+5y^2-5x+4y+8$ の $(x,y)=(2,-1)$ における Taylor 展開を書き下そう．

$$f_x=4x+3y-5.\ \ \therefore\ f_x(2,-1)=0,\qquad f_y=3x+10y+4.\ \ \therefore\ f_y(2,-1)=0.$$

$f_{xx}=4$,　$f_{xy}=3=f_{yx}$,　$f_{yy}=10$.

そして 3 次以上の偏導函数はすべて 0 であるから

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(2,-1)+f_x(2,-1)(x-2)+f_y(2,-1)(y+1)\\&\quad+\frac{1}{2!}\bigl\{f_{xx}(2,-1)(x-2)^2+2f_{xy}(2,-1)(x-2)(y+1)+f_{yy}(2,-1)(y+1)^2\bigr\}\\&=1+\bigl\{2(x-2)^2+3(x-2)(y+1)+5(y+1)^2\bigr\}.\ \ //\end{aligned}$$

曲面とその接平面

- 1 変数函数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$

　= グラフ（曲線）$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾き．

接線の方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$．一方，$f(x)$ の Taylor 展開を
$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2$ とすると

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)$$
$$\to 0 \quad (x \to a).$$

すなわち $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o((x-a))$．これは点 $(a,f(a))$ での接線は，$(a,f(a))$ の近くで曲線 $y=f(x)$ を最も良く近似する直線であることを示している．接線の方程式は内積を用いて，$\big\langle\, (f'(a),-1),\, (x-a,\, y-f(a))\,\big\rangle = 0$ とも書ける．

● 2 変数函数 $f(x,y)$ についても同様に考察する．$f(x,y)$ を全微分可能とすると

$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$$\Longrightarrow\ \frac{f(x,y)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)-f_y(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \varepsilon \to 0$$
$$\big((x,y)\to(a,b)\big).$$

すなわち $f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+o\Big(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\Big)$．

平面　$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$　を，曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\mathrm{P}_0(a,b,f(a,b))$ における接平面と呼ぶ．内積を用いると，接平面の方程式は

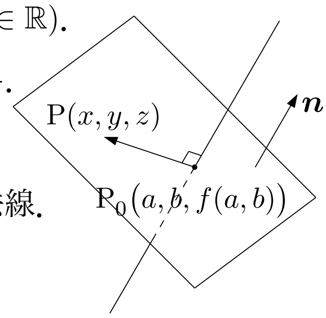
$\Big\langle\, (\underbrace{f_x(a,b),\, f_y(a,b)}_{\substack{\| \\ \mathrm{grad}\, f(a,b)}},-1),\, (x-a,\, y-b,\, z-f(a,b))\,\Big\rangle = 0$ と書ける．

であるから，さらに $\boldsymbol{x} := (x,y)$, $\boldsymbol{a} := (a,b)$ とおくと

$\big\langle\, (\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a}),\, -1),\, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\, z-f(\boldsymbol{a}))\,\big\rangle = 0$ とも書ける．

ベクトル $\boldsymbol{n} := (f_x(a,b),\, f_y(a,b),-1)$ が接平面の法線ベクトルになるので（平面の方程式より $\langle \boldsymbol{n},\, \overrightarrow{\mathrm{PP}_0}\rangle = 0$ ；右下図参照），曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\mathrm{P}_0(a,b,f(a,b))$ における法線の方程式は，$(x-a,\, y-b,\, z-f(a,b)) = t\boldsymbol{n}$ $(t\in\mathbb{R})$．

すなわち，$t$ を消去すると $\dfrac{x-a}{f_x(a,b)} = \dfrac{y-b}{f_y(a,b)} = \dfrac{z-f(a,b)}{-1}$．




**例 6.5.**　$z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ の点 $\mathrm{P}(2,-3,2)$ における接平面と法線．

$f(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ とおくと，$f_x=\dfrac{x}{2}$，$f_y=\dfrac{2}{9}y$ より，

$f_x(2,-3)=1$，$f_y(2,-3)=-\dfrac{2}{3}$．よって点 P における接平面 $\pi$ の方程式は，

$$z=(x-2)-\frac{2}{3}(y+3)+2 = x-\frac{2}{3}y-2.$$

平面 $\pi$ の法線ベクトルは $(1,-\frac{2}{3},-1)$ であるから，求める法線の方程式は

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-2}{-1}$$