§4. 2変数函数の極限と連続性

高校では「領域」(domain) という言葉を安易に使っていたように思う．ここでは数学で使う用語として，定義しておこう．

2個の実数の組 (x, y) 全体の集合を $\mathbb{R}^2$ で表す．$\mathbb{R}^2$ は座標平面とみなしてもよい．$\mathbb{R}^2$ の2点 $\mathrm{P}(x, y), \mathrm{Q}(x', y')$ に対して

$$\rho(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

とおく．$\rho(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ を P, Q の間の距離という．

用語の定義.

(1) 点 P の ε 近傍 $(\varepsilon > 0)$：集合 $V(\mathrm{P}; \varepsilon) := \{Q\ ;\ \rho(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) < \varepsilon\}$ のこと．
（すなわち，中心が P で半径が ε の円の内部）

(2) $D \subset \mathbb{R}^2$ とする．

(i) P が D の内点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $V(\mathrm{P}; \varepsilon) \subset D$.

(ii) P が D の境界点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$V(P; \varepsilon) \cap D \neq \varnothing$ かつ $V(\mathrm{P}; \varepsilon) \cap D^c \neq \varnothing$.
D の境界点の全体を ∂D で表して，D の境界と呼ぶ.

(iii) P が D の外点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ P は内点でもなく境界点でもない.

- 外点とは，D の補集合 D^c の内点である．

(3) $D \subset \mathbb{R}^2$ が開集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ D のすべての点が D の内点になっている．

例 **4.1.**　円の内部 $V(\mathrm{P}_0, r)$ は開集合である．
$V(\mathrm{P}_0, r)$ の境界は円周 $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ である．
円の外部の点が，$V(\mathrm{P}_0, r)$ の外点である（直感と良く合っている）．

(4) $D \subset \mathbb{R}^2$ が連結 (connected)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ D の任意の2点が，D に含まれる連続曲線で結ばれる．

(5) $D \subset \mathbb{R}^2$ が領域 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ D は連結な開集合.

(6) 閉領域 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 領域とその境界の和集合.

2個の変数 x, y があるとき，それを点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が動くと考える．2変数の函数とは，$\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) に対して，実数 z を対応させることである．このとき，$z = f(x, y)$ と書く．

例 **4.2.**　$f(x, y) = x^2 + y^2$.

2 変数の函数 $f(x,y)$ が定義されている $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を $f(x,y)$ の定義域という．函数 $f(x,y)$ のとる値すべてからなる集合を $f(x,y)$ の値域と呼び，$f(D)$ で表す：

$$f(D) := \{z \in \mathbb{R}\ ;\ z = f(x,y) \quad \text{for some } (x,y) \in D\}.$$

定義 4.3. $f(x,y)$：$D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする函数．
このとき，函数 $f(x,y)$ の**グラフ**とは，xyz 空間（$\mathbb{R}^3$ と書く）の部分集合

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

のことをいう．従って，$f(x,y)$ のグラフは一般に空間内の曲面になる．

曲面を理解するために，平面 $z = d$（あるいは他の平面）で切って，交わりにできる曲線を考察したり，その曲線を xy 平面に投影して考えたりする（等高線）．

例 4.4. 2 変数函数 $f(x,y) := x^2 + y^2$（定義域は $\mathbb{R}^2$ 全体）を考えると，$f(x,y)$ のグラフは $\mathbb{R}^3$ の曲面 $S : z = x^2 + y^2$.

$z = d \geqq 0$ のとき，$x^2 + y^2 = d$．これは xy 平面では，中心が原点で半径が $\sqrt{d}$ の円の方程式を表す．言い換えると，曲面 S を平面 $z = d \geqq 0$ で切ると，切り口は中心が $(0,0,d)$ で半径 $\sqrt{d}$ の円になっている．図 1 参照[1]．

さらに，平面 $y = c$ で S を切ると，$z = x^2 + c^2$ となり，これは放物線である．
曲面 S は放物面と呼ばれる．

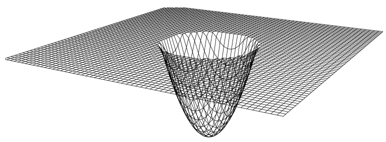


図 1. $z = x^2 + y^2$ のグラフを平面 $z = d \geqq 0$ で切ったところ

定義 4.5. 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{A}(a,b)$ に近づく $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\rho(\mathrm{P},\mathrm{A}) \to 0$.

ここで $\rho(\mathrm{P},\mathrm{A}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ であり，

$$\left.\begin{array}{l}|x-a| \\ |y-b|\end{array}\right\} \leqq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqq |x-a| + |y-b|$$

であるから

$$\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{A}(a,b)\ (\text{あるいは } (x,y) \to (a,b)) \iff x \to a \quad \text{かつ} \quad y \to b.$$

[1] 本授業のシラバス（授業情報）のページの一番下の「その他」の欄でリンクしているページに，今後授業で扱う函数のグラフや動画を置くのでダウンロードして見て下さい．なお，動画は拡張子が MOV ファイルなので，Windows user は Apple 社の QuickTime が別途必要になるかもしれません．

定義 4.6. $(x,y) \to (a,b)$ のとき，$f(x,y)$ が一定の値 α に収束するなら，これを $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ と書く．

注意 4.7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}$ は $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(\lim_{y\to b}\bigr)$ でも $\displaystyle\lim_{y\to b}\bigl(\lim_{x\to a}\bigr)$ でもない．

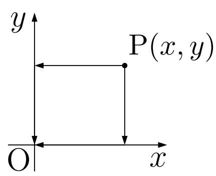
例 4.8. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ のとき．

$$\lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\bigr) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

一方で

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = -1.$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0}\bigr)$ は，(x,y) を原点に近づけるときに，$(x,y) \to (x,0) \to (0,0)$ という非常に特別な経路を使うということになっているし，同様に，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0}\bigr)$ も特別な経路 $(x,y) \to (0,y) \to (0,0)$ である．



従って $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するとは，どんな風に (x,y) が $(0,0)$ に近づいても，$f(x,y)$ が一定の値に近づくということであるので．

例 4.9. $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ のときの $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ について：
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\bigr) = 0$，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\bigr) = 0$ であるが，問題の極限は存在しない．
もし存在するならば，どのように (x,y) を $(0,0)$ に近づけても，$f(x,y)$ は一定の値に近づくはず．しかし

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$$

であるから，そうはなっていない．

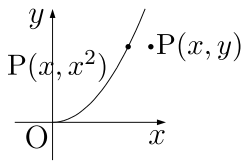
例 4.10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + xy^2 + x^3y + y^3}{x^3 + y^2} =$ について：
実は分子が因数分解される： 分子 $= (x^3 + y^2)(x+y)$．ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + xy^2 + x^3y + y^3}{x^3 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0.$$

例 4.11. $f(x,y) := \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ のときの $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ついて：
$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$，$\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$．さらに $m\neq 0$ のとき，

$$f(x,mx)=\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx}{x^2+m^2}$$

ゆえ，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,mx)=0$ でもある．つまり，直線 $y=mx$ 上を動きながら点 $\mathrm{P}(x,y)$ が原点 O に近づくとき，$f(x,y)\to 0$ である．しかしながら $f(x,x^2)=\frac{1}{2}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{1}{2}$ となるから，放物線 $y=x^2$ 上を動きながら点 $\mathrm{P}(x,y)$ が原点 O に近づくとき，$f(x,y)\to\frac{1}{2}$ である．ゆえに問題の極限は存在しない．



定義 4.12. $f(x,y)$ が (a,b) で連続 $\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

例 4.13. $f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ について：

$$0 \leqq |f(x,y)-f(0,0)| = |xy|\,\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqq |xy| \to 0.$$

ゆえに $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．

例 4.14. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ について：

極座標を用いるのがわかりやすい． $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$.

そうすると，$(x,y)\to(0,0) \iff r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.

さて極座標で表すと，$\dfrac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2}=r(\cos^3\theta+3\cos\theta\sin^2\theta)$ となるから

$$0\leqq |f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)| = |r(\cos^3\theta+3\cos\theta\sin^2\theta)| \leqq r+3r=4r\to 0.$$

ゆえに $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である．

例 4.15. $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ について：

先の例と同様に，$0\leqq |f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)| = |r\sin\theta\cos\theta| \leqq r\to 0$ より，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．