§3. 広義積分

応用上，非有界な函数，無限区間での積分等を考える必要が生じる.

(1) $\underline{f(x)\text{ が }[a,b)\text{ で定義されて連続な場合}}$：

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという．その極限値を同じ記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．極限値が存在しない場合は発散するという.

(2) $\underline{f(x)\text{ が }(a,b]\text{ で定義されて連続な場合}}$：

(1) と同様，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという．そうでない場合は発散するという.

例 3.1. $\alpha>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ について： $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ の存在が問題.

(i) $\alpha=1$ のとき：$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon \to \infty \quad (\varepsilon\to 0)$ となって発散.

(ii) $\alpha>0$，$\alpha\neq 1$ のとき：$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$.

- $\alpha>1$ のとき： $\varepsilon^{1-\alpha}\to\infty$ $(\varepsilon\to 0)$ だから問題の広義積分は発散.
- $0<\alpha<1$ のとき： $\varepsilon^{1-\alpha}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ より，問題の広義積分は存在して，

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

(3) $\underline{f(x)\text{ が }(a,b)\text{ で定義されて連続な場合}}$：

$\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという.

従って，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が収束

$$\iff \exists c\ (a<c<b)\ \text{ s.t. } \int_a^c f(x)\,dx \text{ と } \int_c^b f(x)\,dx \text{ が共に収束.}$$

例 3.2.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\Big[\sin^{-1}x\Big]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\Big[\sin^{-1}(1-\varepsilon_2)-\sin^{-1}(-1+\varepsilon_1)\Big]\\ &= 2\sin^{-1}1 = \pi.\end{aligned}$$

面倒なので，これを次のように書くことが多い：

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\sin^{-1} x\Big]_{-1}^{1} = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1) = \pi.$$

(4) <u>$f(x)$ が $[a,c)$, $(c,b]$ $(a<c<b)$ で定義されて連続な場合</u>：

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ の存在と $\displaystyle\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$ の存在を要求する．共に存在するとき

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx.$$

右辺の極限は ε と ε' は独立に動かすことに注意．ダメな例：

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{1} = \log 1 - \log 1 = 0.$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\log|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \Big[\log x\Big]_{\varepsilon}^{1}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\log\varepsilon - \log\varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

そもそも，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}$ が存在しないのだから，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ は発散する．

<u>**(5)** $f(x)$ が $[a,\infty)$ で定義されて連続なとき</u>：

$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は収束するという．

$(-\infty, b\,]$ の場合も同様．

さらに，$(-\infty,\infty)$，(a,∞)，$(-\infty,b)$ の場合等も，(4) と同様に両端を別々に考える．

例 3.3. $\alpha>0$ のとき，$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ について：

例 3.1 と同様に，$\alpha=1$ ならば，$\displaystyle\int_1^M \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^M = \log M \to \infty \quad (M\to\infty)$

より問題の広義積分は発散．

$\alpha>0$，$\alpha\neq 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^M \frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\Big[x^{1-\alpha}\Big]_1^M = \frac{1}{1-\alpha}(M^{1-\alpha}-1).$

- $0<\alpha<1$ のとき： $M^{1-\alpha}\to\infty$ より広義積分は発散．
- $\alpha>1$ のとき： $M^{1-\alpha}\to 0$ であるから，$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}.$

原始函数がわかるときは，定義に忠実に積分の極限を計算すればよい．

例 3.4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}\,dx$ の計算.
分子を $1 = 1 + x^2 - x^2$ と見る．$M > 1$ のとき

$$\int_1^M \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^M \frac{dx}{x} - \int_1^M \frac{x}{1+x^2}\,dx = \log M - \frac{1}{2}\bigl[\log(x^2+1)\bigr]_1^M$$
$$= \log\frac{M}{\sqrt{M^2+1}} + \frac{1}{2}\log 2 \to \frac{1}{2}\log 2 \quad (M \to \infty).$$

● 原始函数がわからないときでも，広義積分の収束を知りたいことが多々ある.
次の判定条件が有用．$[a,\infty)$ の場合を述べるが，他の場合も同様である.

定理 3.5. $f(x)$, $g(x)$：$[a,\infty)$ で連続，$|f(x)| \leqq g(x)$ $(\forall x \geqq a)$ とする.
$\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束 $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も収束.

例 3.6. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ は収束する.

左端は広義積分ではない．一方 $x \geqq 1$ のとき，$0 < e^{-x^2} \leqq xe^{-x^2}$ であり

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Bigl[-e^{-x^2}\Bigr]_1^\infty = \frac{1}{2e}$$

であるから，問題の広義積分は収束する.

例 3.7. $I := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$ について：
左端の $x = 0$ で問題が生じている．$x \to 0$ のとき，$\sin x = O(x)$ であることを思い出そう．そうすると $\log(\sin x) - \log x = \log\dfrac{\sin x}{x}$ より

$$\sqrt{x}\,\log(\sin x) = \sqrt{x}\,\log x + \sqrt{x}\,\log\frac{\sin x}{x} \to 0 \quad (x \to +0).$$

ゆえに定数 $M > 0$ が存在して，$|\sqrt{x}\,\log(\sin x)| \leqq M$ $(0 < \forall x \leqq \frac{\pi}{2})$．すなわち，$|\log(\sin x)| \leqq \dfrac{M}{\sqrt{x}}$ である．ここで $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ は収束するから，I も収束する.

ついでに $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示しておこう.

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(\sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$$

の右辺第 2 項において，$x = \frac{\pi}{2} - y$ とすると，第 2 項 $= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \log(\cos y)\,dy$．ゆえに

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \bigl\{\log(\sin x) + \log(\cos x)\bigr\}\,dx = \int_0^{\pi/4} \log\Bigl(\frac{1}{2}\sin 2x\Bigr)\,dx \\
&= -\log 2 \int_0^{\pi/4} dx + \int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{\pi}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\,I.
\end{aligned}
$$

これより，$I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ が出る．

例 3.8. **Beta 函数：** $B(p,q) := \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \ (p>0,\ q>0)$．

$p \geqq 1$ かつ $q \geqq 1$ のときは通常の積分である．以下，$f(x) := x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ とおく．
$\frac{1}{2} \leqq x < 1$ のとき，x^{p-1} は有界であるから，$0 \leqq f(x) \leqq M(1-x)^{q-1}$．
ここで，$0 < q < 1$ のとき $\displaystyle\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$ は収束するので，$\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ も収束．
同様に $0 < p < 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ は収束する．
以上より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は $p>0,\ q>0$ で定義できる．

例 3.9. **Gamma 函数：** $\Gamma(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \ (\alpha > 0)$．

$f(x) := e^{-x}x^{\alpha-1}$ とおく．$x \to \infty$ のとき $x^2 f(x) = e^{-x}x^{\alpha+1} \to 0$ であるから，定数 $M > 0$ が存在して，$0 < f(x) \leqq Mx^{-2}$ $(\forall x \geqq 1)$．ここで，$\displaystyle\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ は収束するので，$\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ も収束する．
また，$0 \leqq f(x) \leqq x^{\alpha-1}$ であり，$\alpha > 0$ ならば $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ も収束する．

例 3.10. $n = 2, 3, \ldots$ のとき，$T_n := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ の計算．

$x = \tan t$ とおくと，$dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$ であるから

$$
T_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}
$$