§2. 定積分

以下 $-\infty < a < b < \infty$，$f(x)$：閉区間 $[a,b]$ で定義された有界な函数 ($|f(x)| \leqq M$).
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と分点を取って（等間隔とは限らない），閉区間 $[a,b]$ を n 個の小区間 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に分割する．　この分割を Δ で表す．

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

そして，$|\Delta| := \max\limits_{1 \leqq i \leqq n}(x_i - x_{i-1})$ とおく．
$\forall \xi_i \in I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をとり，$\xi := (\xi_1, \ldots \xi_n)$ とおいて

$$R(f, \Delta, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を，分割 Δ に関する $f(x)$ の **Riemann** 和と呼ぶ．

定義 2.1.　$f(x)$：閉区間 $[a,b]$ で積分可能
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $|\Delta| \to 0$ のとき，$R(f, \Delta, \xi)$ が $\xi_i \in I_i$ の取り方に関係なく，ある実数 A に収束すること：$\exists A = \lim\limits_{|\Delta| \to 0} R(f, \Delta, \xi)$.

このとき，極限値 A を $f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ における定積分と呼び，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と表す．

注意 2.2.　より正確には，教科書のように $S(f, \Delta)$，$s(f, \Delta)$ を導入して積分可能性を定義する．このとき，ここでの定義 2.1 は命題（つまり証明すべき事柄）になる．

例 2.3.　$f(x) \equiv k$（定数函数）のとき．
$R(f, \Delta, \xi) = \sum\limits_i k(x_i - x_{i-1}) = k(b - a)$．ゆえに $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b - a)$.

例 2.4.　$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$ のとき，$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能ではない．
実際，分割 Δ の各小区間 I_i には無理数も有理数も存在する．従って ξ_i をすべて有理数ととれば，$R(f, \Delta, \xi) = b - a$，そして ξ_i をすべて無理数ととれば，$R(f, \Delta, \xi) = 0$ となって，$R(f, \Delta, \xi)$ が ξ の取り方に依らずに一定の値に収束することはない．

- 定積分を定義に立ち戻って計算することはほとんどない．

<u>定積分の線型性：</u>　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のとき

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

定積分の加法性： $a < c < b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

約束： $a < b$ のとき，$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$．そして，$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx := 0$.

定理 2.5. a, b, c を任意の実数とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

証明. 丁寧に場合分けをするだけなので略. □

定理 2.6 (定積分の単調性).

$$f(x) \leqq g(x) \ \ (\forall x \in [a,b]) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

定理 2.7. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

証明. $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ $(\forall x)$ より

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

定理はこれより直ちに従う. □

閉区間 $[a,b]$ で連続な函数は最大値と最小値を持つ．特に有界であるので，積分可能性を論じることができる.

定理 2.8. $f(x)$：$[a,b]$ で連続 $\implies$ $f(x)$：$[a,b]$ で積分可能.

定理 2.9 (微分積分学の基本定理).

$f(x)$：$[a,b]$ で連続，$F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$

$\implies$ $F(x)$ は (a,b) で微分可能で，$F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in (a,b))$.

すなわち，連続函数は必ず原始函数を持つ.

定理 2.10. $f(x)$：$[a,b]$ で積分可能，かつ原始函数 $F(x)$ を持つ

（$f(x)$ が連続ならば OK）

$\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. 右辺を $\big[F(x)\big]_a^b$ と書く.

• この定理により，高校のときのように，原始函数を求めて定積分を計算すればよいということになる.

定理 2.11 (積分の平均値の定理). $f(x)$：$[a,b]$ で連続
$\Longrightarrow$ $\exists c\ (a<c<b)$ s.t. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

証明. $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ とおく．微分の所で学んだ平均値の定理から

$$\exists c\ (a<c<b)\ \text{ s.t. }\ F(b)-F(a) = F'(c)(b-a).$$

$F(b)-F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と $F'(c)=f(c)$ より定理が従う． □

命題 2.12. $f(x)$：$[a,b]$ で連続，かつ $f(x) \geqq 0$ $(a \leqq \forall x \leqq b)$.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ $(a \leqq \forall x \leqq b)$.

注意 2.13. 積分の単調性から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$ である．命題は，$f(x)$ が連続ならば，この等号が成立するのは，$f(x)$ が恒等的に 0 の時に限ることを主張している．

命題 2.12 の証明. $\exists c \in [a,b]$ s.t. $f(c) > 0$ とする．$f(x)$ は連続なので，$c = a, b$ であっても，a, b の近くで $f(x) > 0$ となるので，$a < c < b$ としてもよい．このとき，$\varepsilon > 0$ が存在して，閉区間 $[c-\varepsilon,\, c+\varepsilon]$ で $f(x) > 0$ である．$m := \min_{x\in[c-\varepsilon,\, c+\varepsilon]} f(x)$ とおくと，$m > 0$ であって，

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx \geqq 2m\varepsilon > 0$$

となって，仮定に反する． □

例 2.14. $I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ について：
$x = \frac{\pi}{2} - y$ とおくと，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ となるので，sin が cos になっても結果は同じであることに注意しておこう．さて $n \geqq 2$ のとき

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\,\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx.$$

であったから（先週の計算）

$$I_n = -\frac{1}{n}\Big[\sin^{n-1}x\,\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

ここで，$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1$ ゆえ，$m \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\, I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\, I_{2m-4} = \cdots \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1}\, I_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\, I_{2m-3} = \cdots \\ &= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} \cdot 1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\end{aligned}$$

例 **2.15** (**Wallis の公式**)**.**

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

証明. $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x$ であるから

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx.$$

例 2.14 より

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leqq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

左側の不等式から

$$\pi \geqq 2 \cdot \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{2n}{2n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

右側の不等式から

$$\pi \leqq 2 \cdot \frac{(2n-2)!!\,(2n)!!}{((2n-1)!!)^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

よって

$$\pi \leqq \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \leqq \frac{2n+1}{2n}\, \pi$$

において $n \to \infty$ とすれば Wallis の公式を得る. □