§1. 三角函数の有理式の不定積分 etc

[I] $R(x,y)$ が x,y の有理函数であるとき，$\displaystyle\int R(\cos x,\,\sin x)\,dx$ の計算.

$\tan\frac{x}{2}=t$ と置くことにより，t の有理函数の原始函数を求めることに帰着する.
実際，$\displaystyle\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$ であるから

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

そして，$\displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=dt$ より，$\displaystyle dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$. ゆえに

$$\int R(\cos x,\,\sin x)\,dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\,\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

例 1.1. (1) $\displaystyle I=\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}\,dx.$

$x=\tan\frac{t}{2}$ とおくと，上での計算より

$$3\sin x+4\cos x=\frac{6t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}=-2\frac{2t^2-3t-2}{1+t^2}=-2\frac{(t-2)(2t+1)}{1+t^2}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=-5\int\frac{dt}{(t-2)(2t+1)}=-\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{2}{2t+1}\right)dt\\&=-\log\left|\frac{t-2}{2t+1}\right|=\log\left|\frac{2\tan\frac{t}{2}+1}{\tan\frac{t}{2}-2}\right|\end{aligned}$$

(2) $a>b>0$ のとき，$\displaystyle I=\int\frac{dx}{a+b\cos x}.$

(1) と同様にして

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{a+b\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{2\,dt}{(a+b)+(a-b)t^2}\\&=\frac{2}{a-b}\int\frac{dt}{t^2+\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,t\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\tan\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

[II] $R(x,y,z)$ が x,y,z の有理函数のとき，$\displaystyle I=\int R(\cos^2x,\,\sin^2x,\,\tan x)\,dx$ の計算.

この場合は $\tan x=t$ とおくと

$$\cos^2x=\frac{1}{1+t^2},\quad \sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

より，$\displaystyle I=\int R\left(\frac{1}{1+t^2},\,\frac{t^2}{1+t^2},\,t\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt.$

例 1.2. (1) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}.$ ただし $a>0,\,b>0.$

$\displaystyle a^2\cos^2x+b^2\sin^2x=\frac{a^2+b^2t^2}{1+t^2}$ であるから

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1+t^2}{b^2t+a^2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{t^2+\dfrac{a^2}{b^2}}\\&=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}t\right)=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{1+\tan x}\,dx$ (問 3.2.5 (6)).

$\tan x=t$ とおくと

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\log|t+1|-\frac{1}{4}\log(t^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}t\\&=\frac{1}{2}\log|\tan x+1|-\frac{1}{4}\log(\tan^2x+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan x)\\&=\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+\frac{1}{2}x.\end{aligned}$$

ここで，$-\log(\tan^2x+1)=\log\cos^2x=2\log|\cos x|$ 及び
$\tan^{-1}(\tan x)=x+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ であることを用いた.

その他の積分

例 1.3. $n=2,3,\dots$ に対して

$$\begin{aligned}\int\sin^nx\,dx&=\int\sin^{n-1}x\,\sin x\,dx\\&=-\sin^{n-1}x\,\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,\cos^2x\,dx\\&=-\sin^{n-1}x\,\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^nx\,dx.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\,\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx.$$

同様に（教科書は符号が違っている）

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

例 1.4.　$n = 2, 3, \ldots$ に対して

$$\int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin(n-2)x}{\sin x}\,dx + \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x.$$

なぜならば，$\sin nx - \sin(n-2)x = 2\cos(n-1)x \sin x$ より

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2\cos(n-1)x.$$

この両辺を積分すればよい．

同様に

$$\int \frac{\cos nx}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos(n-2)x}{\sin x}\,dx + \frac{2}{n-1}\cos(n-1)x.$$

問 3.2.8.　$n = 2, 3, \ldots$ のとき

$$\int (\sin^{-1}x)^n\,dx = x(\sin^{-1}x)^n - n\int x(\sin^{-1}x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$\int x(\sin^{-1}x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,(\sin^{-1}x)^{n-1} + (n-1)\int (\sin^{-1}x)^{n-2}\,dx.$$

ゆえに

$$\int (\sin^{-1}x)^n\,dx = x(\sin^{-1}x)^n + n\sqrt{1-x^2}\,(\sin^{-1}x)^{n-1} - n(n-1)\int (\sin^{-1}x)^{n-2}\,dx.$$

● 簡単な微分方程式

$y = y(x)$ を未知函数とする方程式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ を微分方程式という．

最も簡単な微分方程式として，$y' = f(x)$ がある．

すなわち，$F(x, y, y') = f(x) - y'$（y は含まれていない）．

これの解は $y = \displaystyle\int f(x)\,dx$ である．

従って，$\boxed{\text{不定積分を求めること} \longleftrightarrow \text{微分方程式 } y' = f(x) \text{ を解くこと}}$

以下．その他の易しい微分方程式について触れる．

(1) 変数分離形：$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$，すなわち $F(x, y, y') = f(x)g(y) - y'$.

これは $\dfrac{1}{g(y)}\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ と変形して，両辺を x で積分する：

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx \qquad \therefore \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

これを略記して，$\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ の両辺を積分するという．

例 1.5.　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4xy}{1+x^2}$ を解く．

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{4x}{1+x^2}\,dx$ の両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4x}{1+x^2}\,dx$．ゆえに

$$\log|y| = 2\log(1+x^2) + C_1 = \log\big(e^{C_1}(1+x^2)^2\big)$$

ゆえに $y = \pm e^{C_1}(1+x^2)^2$．ここで改めて $\pm e^{C_1} = C$ とおくと，$y = C(1+x^2)^2 \cdots\cdots (*)$

注意 1.6.　C_1 が任意の実数値をとるとき，$C = \pm e^{C_1}$ は 0 以外の任意の実数値をとりうる，従って，上の計算で得られた C は $C \neq 0$ でないといけない．しかし $(*)$ で $C = 0$ とおいた函数 $y \equiv 0$（恒等的に 0 な函数）は明らかに与えられた微分方程式をみたしている．従って $(*)$ における C は任意の実数である．このようなことはいちいち断らないのが普通．

(2) 1 階線型微分方程式：$y' + P(x)y = Q(x)$.

$P(x)$ の原始函数の 1 つを $S(x)$ とする：$S(x) := \displaystyle\int P(x)\,dx$.

このとき，$u(x) = e^{S(x)}y(x)$ とおくと（$S'(x) = P(x)$ に注意して）

$$u'(x) = e^{S(x)}(P(x)y(x) + y'(x)) = e^{S(x)}Q(x).$$

ゆえに $u(x) = \displaystyle\int e^{S(x)}Q(x)\,dx + C$．ただし C は定数．

$$\therefore\ y(x) = e^{-S(x)}u(x) = e^{-S(x)}\left(\int e^{S(x)}Q(x)\,dx + C\right).$$

例 1.7.　$y' + y\cos x = \sin 2x$ をみたす $y = y(x)$ を求めること．

$\int \cos x\,dx = \sin x$ に注意して，$u(x) = e^{\sin x}y(x)$ とおくと

$$u'(x) = e^{\sin x}(y(x)\cos x + y'(x)) = e^{\sin x}\sin 2x = 2e^{\sin x}\sin x\cos x.$$

したがって

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\int e^{\sin x}\cos x\sin x\,dx = 2e^{\sin x}\sin x - 2\int e^{\sin x}\cos x\,dx \\ &= 2e^{\sin x}\sin x - 2e^{\sin x} + C. \end{aligned}$$

$\therefore\ y(x) = e^{-\sin x}u(x) = 2\sin x - 2 + Ce^{-\sin x}$.