調和解析の問題から

九州大学・大学院数理学研究院　野村 隆昭 (Takaaki NOMURA[1])
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

§1　序.

本稿では，調和解析の視点から複素幾何学と関連する問題を見るということで，筆者の研究対象である等質 Siegel 領域や等質錐に話題を限って述べてみたい．

Siegel 領域は，ロシア語オリジナルが 1957 年に出版された論文 [18] において，Piatetski-Shapiro が $\mathbb{C}$ での上半平面の一般化として導入したものであり，有界領域に正則同値となる．その導入は元々は保型形式の研究のためであったが，Piatetski-Shapiro 自身が「the most unexpected application」と [17, p.10] に書いているように，E. Cartan が論文 [4] に書いた問題「$n \geqq 4$ ならば，$\mathbb{C}^n$ に非対称な等質有界領域が存在するか」に肯定的な解答を与えることとなった [19].

一方で，Dorfmeister–Nakajima [9] が解決した基本予想[2]にあるように，任意の等質 Kähler 多様体の構造の記述において，Siegel 領域は重要な役割を果たしている．

等質 Siegel 領域と等質開凸錐が占める「位置」と関係を以下（と次ページ）の模式図に表しておこう．定義は次節で与える．

等質 Kähler 多様体

等質管状領域

$\cap$

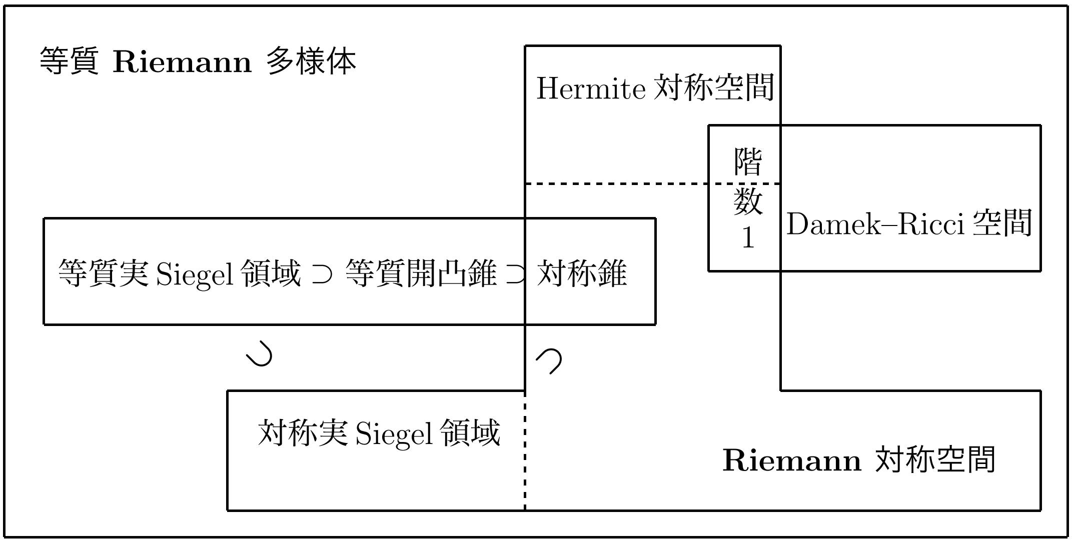
等質 Siegel 領域 $\supset$ 対称 Siegel 領域 $\supset$ 対称管状領域

$\cong$ （Cayley 変換） $\cong$

等質有界領域 $\supset$ 対称有界領域 $\supset$ 開球 in $\mathbb{C}^N$（階数 1）

（Hermite 対称空間）

[1] E-mail: tnomura@math.kyushu-u.ac.jp
[2] Vinberg–Gindikin [22] による．



§2　諸定義.

V は有限次元の実ベクトル空間であるとし，Ω を V の開凸錐とする．Ω が正則 (**regular**) であるとは，Ω は直線を全く含まないことである．これは

$$\Omega^* := \{\lambda \in V^* \,;\, \langle \lambda, x \rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

で定義される Ω の双対錐 Ω^* について，$\Omega^* \neq \varnothing$ となることと同値である．Ω の線型同型群を $G(\Omega)$ で表す：

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \,;\, g(\Omega) = \Omega\}.$$

$G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であり，従って線型 Lie 群である．$G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するとき，Ω は等質であるという．

開凸錐 Ω が V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して自己双対であるとは，

$$\Omega = \left\{y \in V \,;\, \langle x \,|\, y \rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\right\}$$

が成立するときをいう．ここで右辺は，内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ により V^* と V を同一視したときの Ω^* であることに注意．等質開凸錐 Ω が，適当な内積に関して自己双対であるとき，Ω のことを対称錐と呼ぶ．Ω が対称錐であるとき，$G(\Omega)$ は簡約可能な (reductive) Lie 群である．

例 **2.1.** n 次の実対称行列のなすベクトル空間 $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ において，$\Omega = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})^{++}$ は正定値実対称行列のなす開凸錐とする．V の内積 $\langle x \,|\, y \rangle = \mathrm{tr}(xy)$ に関して Ω は自己双対である．また $G = GL(n, \mathbb{R})$ が Ω に

$$G \times \Omega \ni (g, x) \mapsto gx{}^t g \in \Omega$$

により推移的に作用するから，Ω は対称錐である．既約対称錐のリストは以下の通りである：
(1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^{++}$：正定値実対称行列全体,
(2) $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})^{++}$：正定値複素エルミート行列全体,
(3) $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{H})^{++}$：正定値四元数エルミート行列全体,
(4) $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})^{++}$：3 次の正定値八元数エルミート行列全体,
(5) $\mathbb{R}^n$ における Lorentz 錐 $(n=3,4,\dots)$.

次に Siegel 領域の定義を与えよう．V を有限次元実ベクトル空間とし，Ω を V の正則開凸錐とする．V の複素化を W で表し，W における実型 V に関する conjugation を $w\mapsto w^*$ で表す．U を有限次元複素ベクトル空間とし，$Q: U\times U\to W$ をエルミート半双線型 (sesqui-linear) 写像とする．すなわち $Q(u_1,u_2)$ は u_1 に関して複素線型，u_2 に関して反複素線型であり，任意の $u_1,u_2\in U$ に対して $Q(u_2,u_1)=Q(u_1,u_2)^*$ が成立しているとする．さらに Q は **Ω-positive**，すなわち $Q(u,u)\in\overline{\Omega}$ $(\forall u\in U)$ であり，「$Q(u,u)=0 \iff u=0$」が成り立っていると仮定する．このとき，$Z=U\oplus W$ の領域

$$D=D(\Omega,Q):=\{(u,w)\in U\times W\,;\,\mathrm{Im}\,w-Q(u,u)\in\Omega\} \tag{2.1}$$

を第 2 種 **Siegel** 領域と呼ぶ．ここで $U=\{0\}$ となることを許す．このときは $D=V+i\Omega$ となり，管状領域あるいは第 1 種 **Siegel** 領域と呼ぶ.

さて，一般に $\mathbb{C}^N$ の領域 D に対して，D の正則同相がなす群を $\mathrm{Hol}(D)$ で表す．D が有界領域に正則同相ならば，従って特に Siegel 領域ならば，$\mathrm{Hol}(D)$ は有限次元の Lie 群である．$\mathrm{Hol}(D)$ が D に推移的に作用するとき，D は等質であるという．Siegel 領域 $D=D(\Omega,Q)$ が等質であるとき，定義データの Ω は等質になる．また，D が対称であるとは，各 $z\in D$ に対して，involutive な $\sigma_z\in\mathrm{Hol}(D)$ が存在して，z は σ_z の孤立固定点となっていることである.

例 **2.2.** $V=\mathbb{R}$，$\Omega=\mathbb{R}_{>0}$，$U=\mathbb{C}^n$，$Q(u_1,u_2):=u_1\cdot\overline{u}_2$（$\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積）として得られる Siegel 領域

$$D=\{(u,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,w-u\cdot\overline{u}>0\}$$

は階数が 1 であり，$\mathbb{C}^{n+1}$ の開単位球と正則同値である．従ってまた対称である．実際，Cayley 変換（一般の等質 Siegel 領域の Cayley 変換については [15] 参照）

$$\mathcal{C}(u,w)=\left(\frac{2u}{w+i},\frac{w-i}{w+i}\right)\qquad((u,w)\in D)$$

が開単位球との正則同相を与え，$z_0:=(0,i)\in D$ における symmetry σ_{z_0} は $(u,w)\mapsto\left(-i\frac{u}{w},-\frac{1}{w}\right)$ で与えられる.

§3　表現論の問題.

G を連結 Lie 群，K を G の compact な部分群とする．このとき $X := G/K$ は等質 Riemann 多様体である．さて X には G 不変な Borel 測度 μ が存在する：$d\mu(g\cdot x) = d\mu(x)$ $(\forall g \in G)$．この G 不変測度 μ に関する L^2 空間 $L^2(X)$ を考える．$L^2(X)$ には G の作用を持ち上げた形で自然なユニタリ表現 $U : G \to \mathbf{U}(L^2(X))$（$L^2(X)$ 上のユニタリ作用素全体）がある：

$$\big(U(g)f\big)(x) := f(g^{-1}\cdot x). \tag{3.1}$$

いつでも生じる問題として

問題 1***．G のユニタリ表現 $(U, L^2(X))$ を既約分解せよ．

$L^2(X)$ ではなくて，G の作用と可換な微分作用素 D（1 個あるいはいくつかからなる可換系 $\mathbf{D}$）をとって，D や $\mathbf{D}$ の $C^\infty(X)$ での（同時）固有空間上での G の表現を調べる，という問題も興味深い．微分作用素としては，Laplace–Beltrami 作用素をはじめ，考えている等質空間 X の幾何学的な構造から定義されるものが興味の対象となる．

X が一般の等質 Siegel 領域や等質開凸錐である場合での問題を提起するために，対称空間の場合の問題 1 を，Helgason の本 [11] に従ってレビューしてみよう．

G を中心が有限群である非 compact 連結半単純 Lie 群，K を G の極大コンパクト部分群とし，Riemann 対称空間 $X := G/K$ を考える．G の岩沢分解を $G = KAN$ とする．ここで，$A = \exp\mathfrak{a}$（$\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^r$：$r$ は X の階数）で N はべき零 Lie 群である．$M = Z_k(A)$ を K における A の中心化群とし，極小放物型部分群 $MAN = MA \ltimes N$ を考える．各 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して，次で定義される MAN の 1 次元ユニタリ表現 τ_λ を考える：

$$\tau_\lambda(m(\exp(H))n) := \exp i\langle\, \lambda, H\,\rangle \qquad (m \in M,\, H \in \mathfrak{a},\, n \in N).$$

この τ_λ から G のユニタリ誘導表現 π^0_λ を作る：

$$\pi^0_\lambda := \operatorname{Ind}^G_{MAN}\tau_\lambda.$$

ユニタリ表現 π^0_λ は球主系列表現と呼ばれているものである．$G/MAN \approx K/M$ であることから，π_λ は $L^2(K/M)$ 上で実現できて（以下これを π_λ と書く），既約である．

さて K/M 上で恒等的に 1 という値をとる函数を $\mathbf{1}$ で表す．明らかに $\mathbf{1} \in L^2(K/M)$，かつ $\pi_\lambda(k)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ $(\forall k \in K)$ であり，この性質を持つ $L^2(K/M)$ 上の函数は定数函数のみである．各 $f \in C^\infty_c(X)$（台が compact な X 上の C^∞ 函数全体）に対して，Ψf は次で与えられる $\mathfrak{a}^*$ 上の函数で $L^2(K/M)$ に値をとるものとする：

$$(\Psi f)(\lambda) := \int_G f(g\cdot o)\pi_\lambda(g)\mathbf{1}\,dg.$$

ただし dg は G の Haar 測度であり，$o := eK$ は G/K の「原点」である．函数 $G \ni g \mapsto \pi_\lambda(g)\mathbf{1} \in L^2(K/M)$ が右 K 不変であることから，G/K 上の積分として

$$\Psi f(\lambda) = \int_{G/K} f(gK)\pi_\lambda(g)\mathbf{1}\, d\mu(gK)$$

とも書けることに注意する．

定理 3.1 (cf. [11])**.** 写像 $C_c^\infty(X) \ni f \mapsto \Psi(f)$ を拡張することにより，次の Hilbert 空間としての同型を得る：

$$L^2(X) \cong \frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{a}^*/W}^{\oplus} L^2(K/M)\, \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}.$$

この分解に従って，(3.1) のユニタリ表現 U は次のように既約分解される：

$$U \cong \frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{a}^*/W}^{\oplus} \pi_\lambda\, \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}.$$

定理の主張で現れた記号の説明をしよう．$M' := N_K(A)$ を K における A の正規化群とし，$W := M'/M$ とする．W は有限群（**Weyl 群**）であり，その位数を $|W|$ で表す．W は自然に $\mathfrak{a}$ に作用し，その反傾で $\mathfrak{a}^*$ に作用する．函数 $\boldsymbol{c}$ は **Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$ 函数**である．その定義を述べる為に少々準備が必要である．まず，岩沢分解に現れるべき零 Lie 群 N の Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は正の $\mathfrak{a}$ ルート空間の和であることを思い出そう．負の $\mathfrak{a}$ ルート空間の和を $\overline{\mathfrak{n}}$ で表し，$\overline{N} := \exp\overline{\mathfrak{n}}$ とする．また元 $g \in G$ の岩沢分解を

$$g = k(\exp H(g))n \qquad (k \in K,\, H(g) \in \mathfrak{a},\, n \in N) \tag{3.2}$$

と一意的に表す．そして $\rho \in \mathfrak{a}^*$ は $\langle\, \rho, a \,\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} a)\big|_{\mathfrak{n}}$ $(a \in \mathfrak{a})$ で定義される元（正の $\mathfrak{a}$ ルートの重複度付きの和の半分）とし，$\overline{N}$ の Haar 測度を

$$\int_{\overline{N}} e^{-\langle\, 2\rho,\, H(\overline{n})\,\rangle}\, d\overline{n} = 1 \tag{3.3}$$

となるように正規化しておくと，$\boldsymbol{c}$ 函数は次で与えられる：

$$\boldsymbol{c}(\lambda) := \int_{\overline{N}} \exp\langle\, -(i\lambda + \rho), H(\overline{n})\,\rangle\, d\overline{n}. \tag{3.4}$$

ただしこの積分は $\operatorname{Re}(i\lambda) \in \mathfrak{a}_+^*$ のときに収束して，$\boldsymbol{c}(\lambda)$ は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の有理型函数となる．そして $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のとき，$\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ は有限な値を持っていることが示される．

問題 2***．定理 3.1 と同様な分解を一般の等質 Siegel 領域や等質開凸錐で得られないか．

Damek–Ricci 空間ではそのような $L^2(X)$ の分解は得られている (Astengo et al., [2])．余談であるが，ここで Damek–Ricci 空間について述べておこう（[3]，[20] 等

参照）．Damek–Ricci 空間というのは，Heisenberg 型のべき零 Lie 群と正の数からなる乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ との半直積になっている分裂型可解 Lie 群の土台の多様体で，典型的な例としては，階数が 1 の半単純 Lie 群 G の岩沢分解 KAN に現れる可解 Lie 群 AN がある．元々 Damek–Ricci 空間は，岩沢 AN 群上の調和解析を一般化するという目的で導入された群であるが，結果として，Lichnerowicz の問題「調和空間は対称か」に対して，非コンパクトで非対称な調和空間の例を提供することとなった．ここで調和空間とは，Laplacian が局所的に測地線距離だけの函数を基本解として持つような Riemann 多様体のことをいう．

§4　球函数の活用.

前節で述べた Riemann 対称空間や Damek–Ricci 空間上の L^2 の分解においては，球函数が重要な働きをしている．まず Riemann 対称空間の場合から見ていこう．G を中心有限の半単純 Lie 群，K を G の極大 compact 部分群とする．前節で定義した G の球主系列表現 $(\pi_\lambda, L^2(K/M))$ を思い出そう．恒等的に 1 である函数 $\mathbf{1} \in L^2(K/M)$ を用いて，行列要素

$$\phi_\lambda(g) := (\pi_\lambda(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}) \qquad (g \in G)$$

を考える．$\pi_\lambda(k)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ $(\forall k \in K)$ と π_λ がユニタリ表現であるということから，ϕ_λ は両側 K 不変であることがわかる：$\phi_\lambda(k_1 g k_2) = \phi_\lambda(g)$ $(k_1, k_2 \in K)$．函数 ϕ_λ は G 上の球函数である．そして岩沢 AN 群（階数が 1 のときは対称な Damek–Ricci 空間）を考えるとき，$\phi_\lambda\big|_{AN}$ はもちろん表現 $\pi_\lambda\big|_{AN}$ の行列要素である．

補題 4.1. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のとき，$\pi_\lambda\big|_{AN} \cong \mathrm{Ind}_A^{AN} e^{-i\lambda\circ\log}$ である．ただし，log は指数写像 $\exp : \mathfrak{a} \to A$ の逆写像を表す．

この補題の証明は Mackey の誘導表現の理論における「部分群定理」（たとえば [14, Chapter II] 参照）を応用してできるが，よりダイレクトに intertwining operator を与えることでも示すことができる．ユニタリ誘導表現 $\mathrm{Ind}_A^{AN} e^{-i\lambda\circ\log}$ は $L^2(N)$ に実現することができて，それを T_λ で表す．補題 4.1 の同型において，π_λ の空間 $L^2(K/M)$ に属する元 $\mathbf{1}$ に対応する $L^2(N)$ の元を p_λ とする：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}\tau_\lambda & \xrightarrow{\text{表現の } AN \text{ への制限}} & \cong & \mathrm{Ind}_A^{AN} e^{-i\lambda\circ\log} & \\
\wr\!\parallel & & & \wr\!\parallel & \\
(\pi_\lambda, L^2(K/M)) & & & (T_\lambda, L^2(N)) & \\
L^2(K/M) \ni \mathbf{1} & \longrightarrow & & p_\lambda \in L^2(N) & (4.1)
\end{array}$$

補題 4.2. 対応 (4.1) における函数 p_λ は次で与えられる：

$$p_\lambda(n) = \exp\langle -(i\lambda+\rho), H(m_0 n m_0^{-1})\rangle \qquad (n \in N).$$

ただし，$m_0 \in M' = N_K(A)$ は，$\overline{N} = m_0 N m_0^{-1}$ となる元である．

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ であるから，(3.3) より確かに $p_\lambda \in L^2(N)$ であることに注意しておこう．また p_λ は実質的に (3.4) の被積分函数であることも興味深い．

さて階数が 1 であるとき，$\overline{n} \in \overline{N}$ のときの $H(\overline{n})$ をあからさまに計算することができる（たとえば [5, §2] 参照）．そしてその表示を読みかえて，Damek–Ricci 空間での p_λ の定義とする（Damek [6] 参照）．一方で，Damek–Ricci 空間での球函数は測地球面上での平均により導入されていて（[7] 参照），それが行列要素 $(T_\lambda(x)p_\lambda \,|\, p_\lambda)$ に等しいことが [1] や [8] で示されている（対応 (4.1) がある対称空間のときとは違って，これは非自明な事実である）．

§5　対称錐の場合.

本節では対称錐の場合に，補題 4.2 の函数 p_λ を考察しよう．Ω は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持った有限次元実ベクトル空間 V の等質開凸錐で，その内積に関して自己双対であるとする．このとき V には Euclid 型 Jordan 代数の構造が入る．Ω の線型同型群 $G(\Omega)$ は簡約可能である．Jordan 代数 V の単位元を e とするとき，$\Omega = G(\Omega)\cdot e$ である．G を $G(\Omega)$ の単位元の連結成分とすると，G も Ω に推移的に作用している．G における e の固定部分群を K とすると，K は G の極大 compact 部分群である．V の Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$（r は Ω の階数）を一つ固定することにより，G の岩沢分解 $G = KAN$ を具体的に得る（[10] 参照）．そして，岩沢部分群 $H := AN$ は Ω に単純推移的に働いている．

軌道写像による微分同相 $H \ni h \mapsto h\cdot e \in \Omega$ を用いて，H の 1 次元表現を Ω 上の函数と見る．具体的に述べよう．各 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して，$e^{\lambda\circ\log}$ は A の 1 次元表現であり，N 上恒等的に 1 として，$A \ltimes N$ の 1 次元表現に拡張される．Ω 上の函数 Δ_λ を次式で定義する：

$$\Delta_\lambda(an\cdot e) = e^{\langle \lambda,\, \log(a)\rangle} \qquad (a \in A,\, n \in N). \tag{5.1}$$

岩沢分解を $G = NAK$ の方でも考えよう．これに従って，各 $g \in G$ を

$$g = n_1(\exp l(g))k_1 \qquad (n_1 \in N,\, l(g) \in \mathfrak{a},\, k_1 \in K)$$

と一意的に表す．このとき $g^{-1} = k_1^{-1}\big(\exp(-l(g))\big)n_1^{-1}$ であるから，(3.2) と比較して，$H(g^{-1}) = -l(g)$ を得る．ゆえに $\overline{n} \in \overline{N}$ のとき，

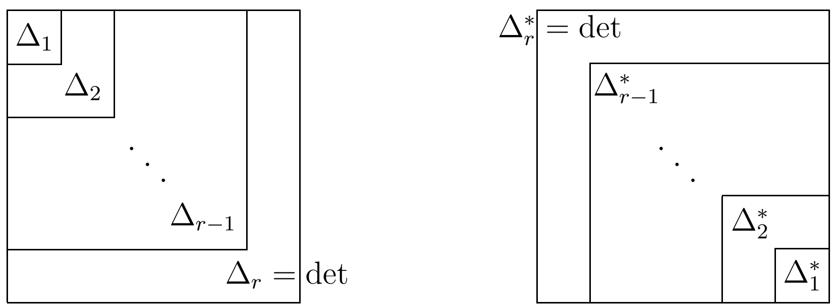
$$\begin{aligned}\exp(-\langle i\lambda+\rho, H(\overline{n})\rangle) &= \exp\langle i\lambda+\rho,\, l(\overline{n}^{-1})\rangle \\ &= \Delta_{i\lambda+\rho}\big(\exp(l(\overline{n}^{-1}))\cdot e\big) \\ &= \Delta_{i\lambda+\rho}(\overline{n}^{-1}\cdot e).\end{aligned}$$

よって，$m_0 \in M' = N_K(A)$ を $m_0 c_j = c_{r-j+1}$ $(j = 1, \ldots, r)$ をみたす元とすると，$\overline{N} = m_0 N m_0^{-1}$ となっているから（[10, Chapter VII] 参照）

$$p_\lambda(n) = \Delta_{i\lambda+\rho}(\overline{n}^{-1} \cdot e) \qquad (\overline{n} := m_0 n m_0^{-1}). \tag{5.2}$$

さて，Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$ に付随する Jordan principal minors を $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ とし，反転した Jordan 枠 $c_r, \ldots, c_1$ に付随する Jordan principal minors を $\Delta_1^*. \ldots, \Delta_r^*$ とする（[10, Chapter VII] 参照）．

例 5.1. $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ で，c_j を (j, j) 行列単位 $(j = 1, \ldots, r)$ とするとき，$\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ は行列 $x \in V$ の左上からの首座小行列式を考えることにあたり，$\Delta_1^*(x), \ldots, \Delta_r^*(x)$ は x の右下からの首座小行列式を考えることにあたる：



一般の場合に戻って，Jordan 代数 V において，$x \in V$ を乗じる作用素を $M(x)$ で表すと，今考えている岩沢分解においては，$\mathfrak{a} = \mathbb{R}M(c_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}M(c_r)$ となっている．従って，$M(c_1), \ldots, M(c_r)$ の双対基底を $\mathfrak{a}^*$ にとることにより，$\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ を $\mathbb{C}^r$ と同一視する．このとき，(5.1) で定義した函数 Δ_λ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r \equiv \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ は次のように書ける：

$$\Delta_\lambda(x) = \Delta_1(x)^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{\lambda_{r-1} - \lambda_r} \Delta_r(x)^{\lambda_r}.$$

一方，Δ_j^* $(j = 1, \ldots, r)$ を用いて Ω 上の函数 Δ_λ^* を次で定義しておく：

$$\Delta_\lambda^*(x) := \Delta_1^*(x)^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^{\lambda_{r-1} - \lambda_r} \Delta_r^*(x)^{\lambda_r}.$$

このとき [10, Chapter VII] より，$\Delta_\lambda^*(x) = \Delta_\lambda(m_0 x)$ であるから，(5.2) より次式を得る：

$$p_\lambda(n) = \Delta_{i\lambda+\rho}^*(n^{-1} \cdot e) \qquad (n \in N). \tag{5.3}$$

問題 3.** 一般の等質開凸錐でも，(5.3) で函数 $p_\lambda \in L^2(N)$ が定義できるか．

§6 等質開凸錐の場合.

前節の最後で述べた問題3について考察を進めてみよう．V を有限次元実ベクトル空間とし，Ω を V の等質開凸錐とする．このとき [21] により，V にはクランと呼ばれる非結合的な代数構造が入り，しかもこのクランは単位元 E を持つ．すなわち，V に双線型な積 $\triangle$ が定義されて，$x \in V$ を左から乗じる作用素を $L(x)$ と書くと

(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x) \quad (\forall x, y \in V)$,
(2) 双線型形式 $x, y \mapsto \operatorname{tr} L(x \triangle y)$ は V に内積を定義する，
(3) 各作用素 $L(x)$ $(x \in V)$ の固有値は実数のみ．

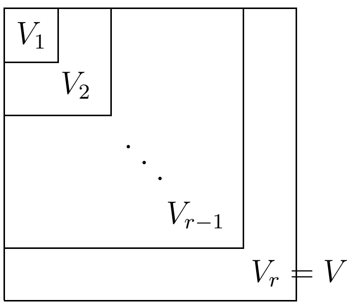
(1) により，$\mathfrak{h} := \{L(x)\ ;\ x \in V\}$ は線型 Lie 代数をなし，(3) より Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は分裂可解である．$H := \exp \mathfrak{h}$ とおくと，$\Omega = H \cdot E$ であり，H は Ω に単純推移的に作用している．実は H は $H = A \ltimes N$（A は可換，N はべき零）の形である．クラン V は正規分解と呼ばれる分解を持つ．すなわち，原始べき等元の直交系 $E_1, \dots, E_r$（r はクランの階数）が存在して，$E = E_1 + \cdots + E_r$ であり，$1 \leqq j \leqq k \leqq r$ に対して

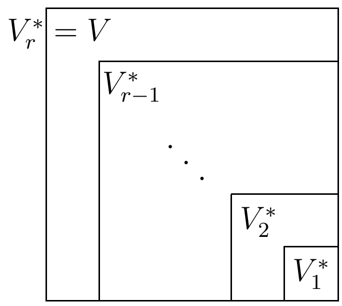
$$V_{kj} := \Big\{x \in V\ ;\ L(E_i)x = \tfrac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{ij})x,\ R(E_i)x = \delta_{ij}x \ \text{ for } i = 1, \dots, r\Big\}$$ [3]

とおくと，$V = \bigoplus_{1 \leqq j \leqq k \leqq r} V_{kj}$ となる．ここで $V_{kk} = \mathbb{R}E_k$ $(k = 1, \dots, r)$ であることに注意しておく．そして，$m = 1, \dots, r$ に対して

$$V_m := \bigoplus_{1 \leqq j \leqq k \leqq m} V_{kj}, \qquad V_m^* := \bigoplus_{r-m+1 \leqq j \leqq k \leqq r} V_{kj}$$

とおく．





区分け $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ は開凸錐 Ω に対応するものであり，もう一つの区分け $V_1^* \subset V_2^* \cdots \subset V_r^* = V$ は Ω の双対錐[4] Ω^* に対応するものである．最初の区分けに付随して，$\overline{\Omega}$ の部分錐の列 $\overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \cdots \subset \overline{\Omega}_r = \overline{\Omega}$ があり，もう一つの区分けに付随して，$\overline{\Omega^*}$ の部分錐の列 $(\overline{\Omega^*})_1 \subset (\overline{\Omega^*})_2 \subset \cdots \subset (\overline{\Omega^*})_r = \overline{\Omega^*}$ がある：

[3] $R(E_i)$ は E_i を右から乗じる作用素を表す．
[4] 上記条件 (2) にいう V の内積に関してとる．

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\Omega}_1 \subset & \overline{\Omega}_2 \subset & \cdots \subset & \overline{\Omega}_r = \overline{\Omega}, \\ \cap & \cap & & \cap \\ V_1 & V_2 & & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} (\overline{\Omega^*})_1 \subset & (\overline{\Omega^*})_2 \subset & \cdots \subset & (\overline{\Omega^*})_r = \overline{\Omega^*} \\ \cap & \cap & & \cap \\ V_1^* & V_2^* & & V \end{array}$$

さて $p_\lambda(n^{-1}) = \Delta^*_{i\lambda+\rho}(n \cdot E)$ $(n \in N)$ が定義できるかという問題であったが，$n \cdot E \in \Omega$ であり，$\Delta^*_{i\lambda+\rho}$ は Ω^* に付随する V の区分けに対応している（すなわち Ω^* 上の函数である）ので，一般にはここで少々困ることになる．しかし，非対称な等質開凸錐は階数 3 になって初めて現れることを鑑みると，次の問題をとりあえず設定するのは妥当と思われる．

問題 **4***．Ω の階数が 3 のときではどうか．この場合，V の内積を適当に取り直せば，(Ω_1^*)，$(\Omega^*)_2$ は対称錐で，実際 Ω の射影になっている．

この問題がアプローチ可能なのは，次の考察による．すなわち Ω が対称錐のとき，

$$\begin{aligned} \Delta^*_\lambda(n\cdot e) &= \Delta^*_1(n\cdot e)^{\lambda_1-\lambda_2}\cdots\Delta^*_{r-1}(n\cdot e)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r}\underbrace{\Delta_r(n\cdot e)^{\lambda_r}}_{=1} \\ &= \Delta^*_1(n\cdot e)^{\lambda_1-\lambda_2}\cdots\Delta^*_{r-1}(n\cdot e)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r} \end{aligned}$$

となっていて，現実には Δ^*_r が $\Delta^*_\lambda(n\cdot e)$ には寄与していないからである．そういうことから，階数が 3 の等質開凸錐のときには，

$$\Delta^*_\lambda(n\cdot E) := \Delta^*_1(n\cdot E)^{\lambda_1-\lambda_2}\Delta^*_2(n\cdot E)^{\lambda_2-\lambda_3}$$

として，$p_\lambda(n^{-1}) = \Delta^*_{i\lambda+\rho}(n\cdot E)$ $(n\in N)$ を定義すればいいのではないかということになる．ただし，$\mathfrak{a} := \mathrm{Lie}(A)$，$\mathfrak{n} := \mathrm{Lie}(N)$ とするとき，$\langle\,\rho, a\,\rangle := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,a)\big|_{\mathfrak{n}}$ $(a\in\mathfrak{a})$ である．

問題 **5***．$\lambda\in\mathfrak{a}^*$ のとき，$p_\lambda \in L^2(N)$ か．

§7　ある定積分．

問題 5 を実行するために，しかも (3.4) に対応する積分を計算するために，必要となる定積分について述べる．この節では，V は階数が 2 の Euclid 型 Jordan 代数とする．このとき，E_1, E_2 を Jordan 枠として，$V = \mathbb{R}E_1 \oplus V_{21} \oplus \mathbb{R}E_2$ と書かれる．V のトレース内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ とし，それから得られるノルムを $\|\cdot\|$ と表す．そうすると，V での対称錐 Ω は

$$\Omega = \{x = x_1E_1 + x_{21} + x_2E_2\ ;\ x_1>0,\ x_1x_2 - \tfrac{1}{2}\|x_{21}\|^2 > 0\}$$

と記述される．ここで $W := \mathbb{R}(E_1-E_2)\oplus V_{21}$ とし，W 上の正定値 2 次形式 B を

$$B\big[\alpha(E_1-E_2)+v\big] = \alpha^2 + \tfrac{1}{2}\|v\|^2 \qquad (\alpha\in\mathbb{R},\ v\in V_{21})$$

で定義すると

$$\Omega = \{\lambda(E_1+E_2)+w \in \mathbb{R}(E_1+E_2)\oplus W\ ;\ \lambda > B[w]^{1/2}\}$$

となるから，Ω は実は $(2+\dim V_{21})$ 次元の Lorentz 錐である．

命題 7.1. μ を Ω 上の $G(\Omega)$ 不変測度とする．$x\in\Omega$ とするときの積分

$$I(x) := \int_\Omega e^{-\langle x\,|\,y\rangle} y_1^\alpha y_2^\beta \big(y_1y_2 - \tfrac{1}{2}\|y_{21}\|^2\big)^\gamma\, d\mu(y) \qquad (y = y_1E_1 + y_{21} + y_2E_2)$$

は，$\mathrm{Re}\,\gamma > \frac{1}{2}n$ $(n := \dim V_{21})$，$\mathrm{Re}(\alpha+\gamma)>0$，$\mathrm{Re}(\beta+\gamma)>0$ のときに絶対収束して

$$I(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{x_1^{\alpha+\gamma}x_2^{\beta+\gamma}}\,\Gamma(\gamma - \tfrac{1}{2}n)\,\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\,F\Big(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma; \frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1x_2}\Big)$$

となる．ただし，$F(a,b,c;z)$ は Gauss の超幾何函数である．

注意 7.2. $\beta=0$ のとき（$\alpha=0$ でも同様）

$$F\Big(\alpha+\gamma,\gamma,\gamma;\frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1x_2}\Big) = \Big(1 - \frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1x_2}\Big)^{-(\alpha+\gamma)}$$

より $I(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2}n)\Gamma(\alpha+\gamma)\,x_2^\alpha\Delta_2(x)^{-(\alpha+\gamma)}$ となり，特に $\alpha = s_1 - s_2$，$\gamma = s_2$ とおけば，既知の結果である

$$I(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(s_1)\Gamma(s_2-\tfrac{1}{2}n)\Delta_{\mathbf{s}}(x^{-1})$$

を得る．§6 で扱った等質開凸錐が対称錐の場合，命題 7.1 は $\alpha=0$ または $\beta=0$ の場合で十分なのであって，α も β も 0 でない場合は非対称な場合を扱って初めて出現する．

問題 6**．一般に対称錐 Ω 上の次の定積分は explicit に計算できるか：

$$I(x) := \int_\Omega e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\Delta_\lambda(y)\Delta^*_{\lambda'}(y)\,d\mu(y) \qquad (x\in\Omega).$$

$\lambda=0$ または $\lambda'=0$ のときは既知である（[10, Chapter VII] 参照）．

§8　おわりに．

ひとたび $p_\lambda \in L^2(N)$ が示されたら，§4 で現れたユニタリ誘導表現 $\mathrm{Ind}_A^{AN}\, e^{-i\lambda\circ\log}$ を $L^2(N)$ で実現した T_λ を用いて

$$\phi_\lambda(x) := (T_\lambda(x)p_\lambda\,|\,p_\lambda) \qquad (x\in AN) \tag{8.1}$$

を球函数と呼ぶのは妥当であろう．この函数の性質をより詳しく知るには，まだまだ実例での検証が必要である．要は非対称のとき，どういうことが起こっているのか，まだまだ手探りの状態なのである．

階数が 3 の等質開凸錐について少しコメントしておこう．対応するクラン V の正規分解は，E_1, E_2, E_3 を原始べき等元の完全直交系として，

$$V = \mathbb{R}E_1 \oplus V_{21} \oplus \mathbb{R}E_2 \oplus V_{31} \oplus V_{32} \oplus \mathbb{R}E_3$$

となる．

(1) $\dim V_{21} = \dim V_{31} = \dim V_{32}\,(= d,\ \text{say})$ のとき，$d = 1, 2, 4, 8$ である．このとき，V には Euclid 型 Jordan 代数の構造が入って，$d = 1, 2, 4, 8$ に応じて，V は

$$\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{C}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{H}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$$

となる．

(2) $\dim V_{21} \neq 0$ かつ $\dim V_{32} \neq 0$ のとき，次元に関する条件は，

$$\dim V_{31} \geqq \max(\dim V_{21}, \dim V_{32}).$$

(3) $\dim V = 11$ において，連続無限個の互いに線型同型ではない等質開凸錐を明示的に記述できる．

(4) 階数 3 での興味深い非対称な等質開凸錐の例として，論文 [12, §3] で例示した基本相対不変式の次数が $1, 2, 3$ となるものや，論文 [13] に書いた双対錐と線型同型なものがある．こういった開凸錐で実際に調和解析を展開するのは興味深い．また (8.1) で定義した球函数のみたすべき微分方程式（系）があるのか．あったとしたらどういうものになるかといった問題もある．開凸錐の幾何構造と密接に関連する微分方程式系が出てくれば，それは大変興味深いことである．

最後になったが，これまで開凸錐（特に階数が 3 のもの）で述べてきたことを，階数が 2 の準対称な等質 Siegel 領域で行うこともおもしろいと思う．等質 Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ が準対称であるとは，(2.1) での記号を用いると，D の Bergman 計量から導かれる $U \oplus W$ のエルミート内積を V に制限して得られる実内積に関して，Ω が自己双対になるときをいう．従って，準対称等質 Siegel 領域の定義データ中の開凸錐は対称錐である．最低次元のものは 5 次元で，Piatetski-Shapiro の論文 [19] ですでに現れている．というよりむしろ，その論文の大半がこの 5 次元の領域について書かれてあり，最低次元の 4 次元のものは最後の方に少しだけコメントされているだけである．また [16] で扱った Poisson–Hua 核について，果たしてそれを消す微分作用素があるのかという問題もある．論文 [16] の結果は，Poisson–Hua 核が Laplace–Beltrami 作用素で消えるための必要十分条件は，領域が対称なことである．Laplace–Beltrami を考える際に，領域の計量を一般の等質 Kähler 計量に変えても，Poisson–Hua 核を消すのは，対称領域において Bergman 計量（の正の定数倍）からの Laplace–Beltrami だけなのである．

複素幾何との関連でいえば，等質 Siegel 領域のほうでの様々な実験例を書くべきであったが，それは近い将来にということで本稿を終えたい．

参考文献

[1] J.-P. Anker, E. Damek and C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **23** (1996), 643–679.

[2] F. Astengo, R. Camporesi and B. Di Blasio, *The Helgason Fourier transform on a class of nonsymmetric harmonic spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., **55** (1997), 405–424.

[3] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek–Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math., **1598** (1994), Springer-Verlag, Berlin.

[4] E. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935), 116–162; Œuvres complètes I, 1259–1305.

[5] M. Cowling and U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one*, Invent. Math., **96** (1989), 507–549.

[6] E. Damek, *A Poisson kernel on Heisenberg type nilpotent groups*, Colloq. Math., **53** (1987), 239–247.

[7] E. Damek and F. Ricci, *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, J. Geom. Analysis, **2** (1992), 213–248.

[8] B. Di Blasio, *An extension of the theory of Gelfand pairs to radial functions on Lie groups*, Boll. Un. Mat. Ital., **11** (1997), 623–642.

[9] J. Dorfmeister and K. Nakajima, *The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds*, Acta Math., **161** (1988), 23–70.

[10] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[11] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, AMS, Providence, RI, 1994.

[12] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[13] H. Ishi and T. Nomura, *An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone*, In "Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV", J. Hilgert et al. (ed.), 129–134, World Scientific, Singapore, 2009.

[14] R. L. Lipsman, *Group representations*, Lecture Notes in Math., **388** (1974), Springer-Verlag, Berlin.

[15] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl., **18** (2003), 55-78.

[16] T. Nomura, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal., **198** (2003), 229-267.

[17] I. Piatetski-Shapiro, *Étude on life and automorphic forms in the Soviet Union*, in "Selected works of Ilya Piatetski-Shapiro", Ed. by J. Cogdell et al., Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000), 3–15.

[18] I. Piatetski-Shapiro, *On an estimate of the dimension of the space of automorphic forms for certain types of discrete groups*, Ibid, 77–80.

[19] I. Piatetski-Shapiro, On a problem proposed by E. Cartan, Ibid., 193–195.

[20] F. Rouvière, *Espaces de Damek–Ricci, géométrie et analyse*, Semin. Congr., **7** (2003), 45–100.

[21] È. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[22] È. B. Vinberg and S. G. Gindikin, *Kählerian manifolds admitting a transitive solvable automorphism group*, Mat. Sb., **74** (1967), 333–351.