Berezin 変換

京大・理　野村隆昭

最近になって Berezin 変換は多くの数学者の興味を引き，様々な研究の中に現れるようになった．Berezin 自身は今日 Berezin 変換と呼ばれている作用素を，共変表象 (有界作用素の Berezin 表象）と反変表象（Toeplitz 作用素の表象）を結びつけるものとして導入し，彼の量子化の理論 (Berezin quantization) で重要な役割を演じさせている．一方で，Berezin 変換自身は Hankel 変換とともに $\mathbb{C}^N$ の領域での解析学における直接の研究対象でもある．そしてたとえば $\mathbb{C}$ での単位円板（resp. 上半平面）を考えると，そこには Lie 群 $SU(1,1)$ (resp. $SL(2,\mathbb{R})$) が一次分数変換で作用しており，Berezin 変換はこの群の作用で不変な積分作用素になっている．さらにそれは不変測度に関する L^2 空間で有界な自己共役作用素にもなっている．Berezin の論文で出会った当初，私にとって mysterious に感じられた Berezin 変換は，このように群作用を持つ領域上ではその群作用で不変な積分作用素として，「非可換調和解析学」の研究対象となり，たとえばそのスペクトル分解を，群の表現（の既約分解）と関連づけて得ることは大変興味深い問題である．このような方向でも近年は研究が盛んで，陰に陽に Berezin 変換を扱った（私以外の）研究者の名前を思いつくままにあげると ... Arazy, Bertram, Englis, Hilgert, Korányi, Molchanov, Neeb, Ørsted, Peetre, Upmeier, van Dijk, Genkai Zhang, ...（勿論網羅的ではない）．

本講演では，Berezin 変換そのものは L^2 空間の再生核閉部分空間 $\mathfrak{H}$ さえあれば定義されるという観点から（量子化からは離れて），まず一般的に局所コンパクト空間 X 上の Berezin 変換を導入する．そして局所コンパクト群 G が X に作用しており，$\mathfrak{H}$ にこの群作用から自然に得られる G のユニタリ表現 π があるとき，Berezin 変換と G のテンソル積表現 $\pi\otimes\overline{\pi}$ ($\overline{\pi}$ は π の共役）との密接な関係を述べる．そのあとで群不変な Berezin 変換の explicit なスペクトル分解が得られている例をいくつか述べる：

(1) $\mathbb{C}^n$（群は Heisenberg 群）：すでに Berezin 自身が扱っている．Berezin 変換は $\mathbb{C}^n$ の通常の Laplacian の exponential になる．

(2) コンパクト群の線型作用に関連する Berezin 変換，特に unitary 群の作用する $\mathbb{C}^n$ と回転群の作用する $\mathbb{R}^n$ の場合： $\mathbb{C}^n$ の場合は大学院生（当時）の藤田悦郎氏との共同の仕事．テンソル積表現の既約分解の際の Clebsch-Gordan 係数と直交多項式の関係が，固有値計算のキーポイントになる．固有値は Γ 函数の積商で表される（回転群の場合ですでに結構複雑である；閉じた形に書けるけれども）．

(3) 対称 Siegel 領域（有界対称領域）の場合：Berezin (証明なし)，Unterberger-Upmeier, Arazy-Zhang，Ishi-Nomura (unpublished) による．上述の単位円板や上半平面の場合の一般化である．Helgason による Riemann 対称空間上の Fourier 変換の理論により，Berezin 変換の積分核の Harish-Chandra の球 Fourier 変換を計算すれば，それよりただちにスペクトル分解が得られる．その計算過程には，Faraut-Korányi の本 “Analysis on Symmetric Cones” で展開されている（行列空間の凸錐上で導入される Γ 函数等の一般化である）Jordan 代数版の Γ 函数等が関係する定積分の evaluation 等が現れてくる．この

場合，Berezin 変換のスペクトルは連続スペクトルで，一般固有値は Jordan 代数版 Γ-函数の積商で表される．

最後に，現在研究中の一般の（対称とは限らない）Siegel 領域の場合について問題点等に触れたい．この場合はたとえば Berezin 変換 が Laplace-Beltrami 作用素と可換であることさえわかっておらず，実際下手に不変計量を選ぶと（非対称領域の isotropy の小ささにより，不変計量も一般には非同値なものをいろいろ選びようがある），その計量に関する Laplace-Beltrami 作用素とは可換にはならないことや，Beltrami 作用素との可換性と領域の Cayley 変換の Euclid 計量との関係にも触れるつもりである．対称領域の場合での Harish-Chandra の球 Fourier 変換の替わりとなるべき『Berezin 核の Gelfand 変換』についても時間に余裕があれば述べたい．