## §5. Howe の双対ペアとの関係

前回の話では，半径方向の $L^2((0,+\infty),\, r^{n-1}\, dr)$ に $SL(2,\mathbb{R})^{\sim}$ の表現が乗るということであったが，土台の $\mathbb{R}^n$ に $SL(2,\mathbb{R})$ が直接作用するわけではない．ここでは，$O(n,\mathbb{R})$ とともに，$SL(2,\mathbb{R})$ も作用している空間をとり出してこの対を考察する．
$V := \mathrm{Mat}(2\times n,\,\mathbb{R})$ を考える．$V$ には左から $GL(2,\mathbb{R})$ が作用し，右から $GL(n,\mathbb{R})$ が作用する．行列の積は結合的ゆえ，この二つの作用は可換．
$\mathrm{Mat}(2\times n,\,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^n$ であるから，$\mathbb{R}^2$ の標準的な非退化交代双線型形式と $\mathbb{R}^n$ の標準内積をテンソル積する形で，$V$ に非退化交代双線型形式が定義できる．しかしながら，以下では，$V$ が行列の空間であることから，$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ を[1]用いて $V\times V$ 上の双線型形式 $\beta$ を直接次式で定義する．

$$\beta(S,T) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tSJT - {}^tTJS) \qquad (S,T\in V).$$

明らかに $\beta(T,S) = -\beta(S,T)$ であり，

$$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{bmatrix} \in V \ \ ({}^t\boldsymbol{\sigma}_j, {}^t\boldsymbol{\tau}_j \in \mathbb{R}^n;\, j=1,2)$$

とすると，

$$\beta(S,T) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_{1i}\tau_{2i} - \sigma_{2i}\tau_{1i}), \quad \boldsymbol{\sigma}_j = (\sigma_{j1},\ldots,\sigma_{jn}),\, \boldsymbol{\tau}_j = (\tau_{j1},\ldots,\tau_{jn}).$$

ゆえに，同一視

$$V \ni \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{\sigma}_1 \\ {}^t\boldsymbol{\sigma}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \cdots\cdots ①$$

のもとで，$\beta$ は $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準的な非退化交代双線型形式に一致する．ここで，次の補題（とくに同値性の主張）を示そう．

**補題 5.1.** $g\in GL(2,\mathbb{R}),\ k\in GL(n,\mathbb{R})$ とする．
(1) 任意の $S,T\in V$ に対して $\beta(gS,\, gT) = \beta(S,T) \iff g\in SL(2,\mathbb{R})$.
(2) 任意の $S,T\in V$ に対して $\beta(Sk,\, Tk) = \beta(S,T) \iff k\in O(n)$.

**証明.** (1) 直接の計算により ${}^tgJg = (\det g)J$ ゆえ，$\beta(gS,\, gT) = (\det g)\beta(S,T)$ である．これより，所要の同値性を得る．
(2) 行列のトレースの性質から，

$$\beta(Sk,\, Tk) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(k\,{}^tk\,{}^tSJT) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tTJSk\,{}^tk) = \beta(Sk\,{}^tk,\, T). \quad \cdots\cdots ②$$

[1] 本節では行列を表す括弧は［　］を用いることにする．①での書き分けに注意.

$\beta$ は非退化ゆえ，②が任意の $S, T \in V$ に対して $\beta(S,T)$ に等しいことと $k\,{}^t\!k = I$ であること（すなわち $k \in O(n)$ であること）は同値である． □

一般に，ベクトル空間 $W$ と非退化交代双線型形式 $B$ の対 $(W, B)$，あるいは $W$ 自身を**斜交ベクトル空間**という．斜交ベクトル空間の次元は偶数である．
斜交ベクトル空間 $(W, B)$ があるとき，

$$Sp(W) := \{g \in GL(W)\ ;\ B(gw_1, gw_2) = B(w_1, w_2)\ \ (\forall w_1, w_2 \in W)\}$$

を**斜交群**という．

したがって，上の $(V, \beta)$ から斜交群 $Sp(V)$ が定義できる．補題 5.1 (1) は $SL(2,\mathbb{R}) \otimes I \subset Sp(V)$ であることを示し，同補題 (2) は $I \otimes O(n) \subset Sp(V)$ を示している．

**問 1**　(1) $n \geqq 3$ のとき，$A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ が $SO(n)$ の各元と可換ならば，$A$ はスカラー行列であることを示せ．
(2) (1) で $n = 2$ ならどうか．
(3) $O(2)$ だとどうか．

**問 2**　$A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ が $SL(2, \mathbb{R})$ の各元と可換 $\Longrightarrow$ $A$ はスカラー行列．

**定理 5.2.**　$Sp(V)$ において，$g \otimes I$ $(g \in SL(2,\mathbb{R}))$ の形の線型作用素と可換な線型作用素の全体を $\big(SL(2,\mathbb{R}) \otimes I\big)'$ で表すと，$\big(SL(2,\mathbb{R}) \otimes I\big)' = I \otimes O(n)$ が成り立つ．同様に，$\big(I \otimes O(n)\big)' = SL(2,\mathbb{R}) \otimes I$ である．

定理 5.2 の内容を，$SL(2,\mathbb{R}) \otimes I$ と $I \otimes O(n)$ は，あるいは簡略化して，$SL(2,\mathbb{R})$ と $O(n)$ は $Sp(V)$ において**双対ペア (dual pair)** であるという．

### 斜交ベクトル空間と Lagrangian 部分空間

$(V, \beta)$：実斜交ベクトル空間，$L$：$V$ の部分空間．

$$L^\beta := \{\boldsymbol{v} \in V\ ;\ \beta(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}) = 0\ \ (\forall \boldsymbol{l} \in L)\}.$$

$L^\beta$ は $V$ の部分空間である．
$V'$：$V$ の**双対ベクトル空間**（線型形式 $V \to \mathbb{R}$ 全体）．
このとき，$V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \beta(\cdot, \boldsymbol{v}) \in V'$ は線型同型（$\because$ $\beta$ は非退化）．

**補題 5.3.**　$L$：$V$ の部分空間．
(1) $\dim L + \dim L^\beta = \dim V$,
(2) $(L^\beta)^\beta = L$,

(3) $(L_1+L_2)^\beta = L_1^\beta \cap L_2^\beta$,
(4) $(L_1 \cap L_2)$.

**証明.** (1) $V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \beta(\cdot, \boldsymbol{v})\big|_L \in L'$ は線型同型 $V/L^\beta \cong L'$ を引き起こす.
(2)〜(4) 略. □

**定義 5.4.** $L$：$V$ の部分空間.
$L$：**Lagrangian** $\overset{\text{def}}{\iff} L^\beta = L$.

- Lagrangian 部分空間の次元は $\dfrac{1}{2}\dim V$.

**補題 5.5.** $X$：Lagrangian 部分空間 $\Longrightarrow$ $\exists Y$：Lagrangian 部分空間 s.t. $X \cap Y = \{0\}$.

$X, Y$：補題 5.5 の通りとする．このとき，$V = X \oplus Y$.
さらに，$Y \ni \boldsymbol{y} \mapsto \beta(\cdot, \boldsymbol{y})\big|_X \in X'$ は線型同型ゆえ，$X$ の基底からそれに双対な $X'$ の基底をとる手続きにより，次をみたす $V$ の基底 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が存在することがわかる（**斜交基底**という）.

$$X = \mathbb{R}\boldsymbol{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{p}_n, \quad Y = \mathbb{R}\boldsymbol{q}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{q}_n,$$
$$\beta(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = 0, \qquad \beta(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j) = 0, \qquad \beta(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij}.$$

### Heisenberg 群とメタプレクティック表現

以下，$(V, \beta)$：実斜交ベクトル空間，$\mathbb{R}\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{e}$ を基底とする 1 次元のベクトル空間.
直和ベクトル空間 $H := V \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{e}$ は次式によって群になる.

$$(\boldsymbol{v},\, t\boldsymbol{e})(\boldsymbol{v}',\, t'\boldsymbol{e}) := \Big(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}',\, \big(\tfrac{1}{2}\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') + t + t'\big)\boldsymbol{e}\Big).$$

単位元は $(\boldsymbol{0},\, 0\boldsymbol{e})$ であり，$(\boldsymbol{v},\, t\boldsymbol{e})^{-1} = (-\boldsymbol{v},\, -t\boldsymbol{e})$ である.
この群 $H$ を **Heisenberg 群**と呼ぶ.
$\beta$ は非退化ゆえ，$H$ の中心 $Z(H)$ は $\{(\boldsymbol{0},\, t\boldsymbol{e})\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ に一致する.
さて，$X$：$V$ の Lagrangian 部分空間.
$Y$：$V$ の Lagragian 部分空間 s.t. $X \cap Y = \{0\}$.

$V$ の斜交基底 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ をとり，各 $\boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{y} \in Y$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{p}_n\ (x_j \in \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{q}_n\ (y_j \in \mathbb{R}) \quad \cdots\cdots ③$$

と表す．そうすると，

$$\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad \cdots\cdots ④$$

となる．座標系③によって$Y$と$\mathbb{R}^n$を同一視し，$L^2(Y)$はこの同一視に基づく$L^2(\mathbb{R}^n)$とする．次に，$H$の元を

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) := (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\, t\boldsymbol{e}) \quad (\boldsymbol{x}\in X,\, \boldsymbol{y}\in Y,\, t\in\mathbb{R})$$

と表し，$h=h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\in H$に対して，$L^2(Y)$上の作用素$\pi(h)$を次式で定義する．

$$\pi\big(h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\big)f(\boldsymbol{\eta}) = e^{it}e^{i\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})}e^{-\frac{i}{2}\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}f(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{y}) \quad \big(f\in L^2(Y)\big).$$

**定理 5.6.** $\big(\pi, L^2(Y)\big)$は$H$の既約ユニタリ表現である．

定理5.6に現れる既約ユニタリ表現を$\pi^X$で表す．

**注意 5.7.** $X\cap Y = \{0\}$となる$V$のLagrangian部分空間は一意的ではないが，$Y$のとり方を変えても，現れる表現はもとの表現と同値である．

**定理 5.8.** $X, \widetilde{X}$：$V$のLagrangian部分空間 $\Longrightarrow$ $\pi^X$と$\pi^{\widetilde{X}}$は同値である．

**注意 5.9.** Heisenberg群$H$の既約ユニタリ表現$T$で中心$Z(H)=\mathbb{R}\boldsymbol{e}$への制限が$T(\boldsymbol{0},t\boldsymbol{e}) = e^{it}I$となるものは，すべて同値である（Stone–von Neumannの一意性定理）．

以下，$V$のLagrangian部分空間と，$X_0\cap Y_0\{0\}$となるLagrangian部分空間を固定する．そこから得られる$H$の既約ユニタリ表現を$(\pi^{X_0}, L^2(Y_0))$とする．
$Sp(V)$：斜交ベクトル空間$(V,\beta)$から得られる斜交群．
$Sp(V)$は次式で$H$に自己同型として働く：

$$\alpha(g)(\boldsymbol{v},t\boldsymbol{e}) := (g\boldsymbol{v},t\boldsymbol{e}) \quad (g\in Sp(V),\, \boldsymbol{v}\in V,\, t\in\mathbb{R}).$$

**補題 5.10.** $g\in Sp(V)$とする．このとき，$H$の表現$\pi^{X_0}\circ\alpha(g)$と$\pi^{X_0}$は同値である．

したがって，$L^2(X_0)$上のユニタリ作用素$\mathscr{U}(g)$が存在して，

$$\mathscr{U}(g)\pi^{X_0}(h)\mathscr{U}(g)^{-1} = \pi^{X_0}(\alpha(g)h) \qquad (h\in H).$$

- $\mathscr{U}(g)$は各$g\in Sp(V)$を止めるごとに絶対値1の複素数倍を除いて一意的．
- 実際には，$\mathscr{U}: g\mapsto \mathscr{U}(g)$が$Sp(V)$の2重被覆群であるメタプレクティック群$Mp(V)$の表現になるようにできる．この表現$\mathscr{U}$を**メタプレクティック表現**という．

話を$V=\mathrm{Mat}(2\times n,\mathbb{R}))$に戻す．斜交ベクトル空間$(V,\beta)$を得ていた．これよりHeisenberg群を考える．
以下では，$\mathbb{R}^n$を横ベクトルの空間とする．
最初に固定する$V$のLagrangian部分空間は

$$X_0 := \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \ ; \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad Y_0 := \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \ ; \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

そして，$H$ の各元を $\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right)$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R})$ で表す.

$H$ の既約ユニタリ表現 $\pi := \pi^{X_0}$ on $L^2(Y_0)$.

$SL(2,\mathbb{R}) \times O(n,\mathbb{R})$ の各元を $Sp(V)$ の元と見るときの $V$ への作用は

$$\alpha(g,k)\boldsymbol{v} = g\boldsymbol{v}\,{}^tk \qquad (g \in SL(2,\mathbb{R}),\, k \in O(n)).$$

各 $k \in O(n)$ に対して，

$$T(k)f(\boldsymbol{\eta}) = f(\boldsymbol{\eta}k) \qquad (k \in O(n),\, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n).$$

このとき，

$$T(k)\pi(\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{e})T(k)^{-1} = \pi(\boldsymbol{v}k, t\boldsymbol{e}).$$

次の $SL(2,\mathbb{R})$ の 1 パラメータ群 $a(s)$, $n_+(\xi)$ と元 $w$ を思い出そう.

$$a(s) = \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}, \quad n_+(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき，

$$U_A(s)\pi\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right) U_A(s)^{-1} = \pi\left( \begin{bmatrix} e^s\boldsymbol{x} \\ e^{-s}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right),$$

$$U_{N_+}(\xi)\,\pi\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right) U_{N_+}(\xi)^{-1} = \pi\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} - \xi\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right).$$

また，$\mathscr{F}$ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上のユニタリ化した Fourier 変換とすると，

$$\mathscr{F}\pi\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right) \mathscr{F}^{-1} = \pi\left( \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}, t\boldsymbol{e} \right).$$

これらと $a(s)$, $n_+(\xi)$, $w$ の $V$ への作用と整合性を持たせるために，次で定義される $SL(2,\mathbb{R})$ の自己同型 $\gamma$ を導入する．各 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ に対して，

$$\gamma(g) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}.$$

このとき，$\gamma(a(s)) = a(s),\ \gamma(n_+(\xi)) = n_+(-\xi),\ \gamma(w) = w^{-1}$ が成り立つから，$\alpha$ の代わりに $SL(2,\mathbb{R}) \times O(n,\mathbb{R})$ の $V$ への作用を

$$\alpha_\gamma(g,k)\boldsymbol{v} := \gamma(g)\boldsymbol{v}\,{}^tk \qquad \big(\boldsymbol{v} \in V,\ g \in SL(2,\mathbb{R}),\ k \in O(n,\mathbb{R})\big)$$

としておけば，作用素 $U_A(s),\ U_{N_+}(\xi),\ \mathscr{W} = e^{-in\pi/4}\mathscr{F}$ が，Heisenberg 群の既約ユニタリ表現 $\pi(\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{e})$ と $\pi(\alpha_\gamma(g)\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{e})$ $(g = a(s),\, n_+(\xi),\, w)$ の間の絡作用素として現れていることがわかる.